$$\boxed{\text{同次形}\quad \frac{y}{x}=f\left(\frac{dy}{dx}\right)\quad\Longrightarrow\quad \frac{dy}{dx}=p\quad\text{とおく}}$$

$\boxed{\text{例 8}}$　微分方程式 $x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2-2y\dfrac{dy}{dx}+4x=0$　について、次の問に答えよ。

(1)　特異解を求めよ。　　　　(2)　一般解を求めよ。

(3)　初期条件「 $x=-2$ のとき $y=4$ 」を満たす特殊解を求めよ。

(解)

$x\neq 0$ のとき、与式の両辺を x で割ると

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2\,\frac{y}{x}\,\frac{dy}{dx}+4=0$$

$$\therefore\quad \frac{y}{x}=\frac{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+4}{2\,\dfrac{dy}{dx}}$$

$\dfrac{dy}{dx}=p$ とおくと

$$\frac{y}{x}=\frac{p^2+4}{2p}\qquad \therefore y=x\left(\frac{p}{2}+\frac{2}{p}\right)\cdots①$$

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{p}{2}+\frac{2}{p}\right)+x\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{p^2}\right)\frac{dp}{dx}$$

$$\therefore p=\frac{1}{2}p+\frac{2}{p}+x\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{p^2}\right)\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{1}{2}p-\frac{2}{p}=x\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{p^2}\right)\frac{dp}{dx}$$

両辺に $2p^2$ を掛けると

$$p(p^2-4)=x(p^2-4)\frac{dp}{dx}$$

$$(p^2-4)\left(x\frac{dp}{dx}-p\right)=0$$

(1)　$p^2-4=0$ のとき　$p=\pm 2$

これを ① に代入して

$$\therefore\quad y=\pm 2x\quad 〃\qquad\cdots②$$

これは与式を満たすから求める特異解である。

(2)　$p^2-4\neq 0$ のとき

$$x\frac{dp}{dx}=p\qquad \therefore\int\frac{1}{p}dp=\int\frac{1}{x}dx$$

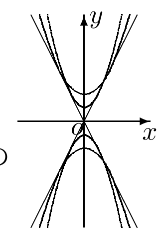
$$\log|p|=\log|x|+c\qquad \therefore\log\left|\frac{p}{x}\right|=c$$

$$\left|\frac{p}{x}\right|=e^c\qquad \therefore\frac{p}{x}=\pm e^c$$

$\pm e^c=c_1$　とおくと　　$p=c_1\,x$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=c_1\,x\qquad \therefore y=\int c_1\,x\,dx$$

$$\therefore y=\frac{1}{2}c_1\,x^2+c_2\qquad\cdots③$$



１階微分方程式の解の任意定数は１つでなければならない。
そこで２直線 ② が放物線群 ③ の包絡線であることを考えると、③ は ② に接する。

よって ②, ③ より x を消去して

$$y=\frac{1}{8}c_1\,y^2+c_2\qquad \therefore c_1\,y^2-8y+8c_2=0$$

重解条件を求めて

$$\frac{D}{4}=16-8c_1\,c_2=0\qquad \therefore c_1\,c_2=2$$

$c_2=\dfrac{2}{c_1}$ を③に代入して　$y=\dfrac{c_1}{2}x^2+\dfrac{2}{c_1}$

$\dfrac{c_1}{2}=C$　とおくと

$$y=Cx^2+\frac{1}{C}\quad (C\text{ は任意定数})\quad 〃\quad\cdots④$$

これが求める一般解である。

(3)　$x=-2$, $y=4$ をに ④ 代入して

$$4=4C+\frac{1}{C}\qquad (2C-1)^2=0\qquad \therefore C=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad y=\frac{1}{2}x^2+2\quad 〃$$

これが求める特殊解である。

≪参考≫　直接　特異解を求めたいとき

$\dfrac{dy}{dx}=p$　とおくと　$xp^2-2yp+4x=0$

これを p についての２次方程式と考え
重解条件を求めると

$y^2-4x^2=0\qquad \therefore y=\pm 2x$　〃

これが求める特異解で、② と同じである。