$$\boxed{\text{1 階線形}\quad \frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x) \quad\Longrightarrow\quad \text{定数変化法}}$$

例 9　微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{x}y=1-x^2$ 　について次の問に答えよ。

(1)　一般解を求めよ。

(2)　初期条件「 $x=-2$ のとき $y=\dfrac{5}{2}$ 」を満たす特殊解を求めよ。

(解)

(1)　$\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{x}y=1-x^2 \quad \cdots①$

非斉次微分方程式 ① の斉次微分方程式

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=0 \quad \cdots②$$

を変形して

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x} \quad \therefore \frac{1}{y}dy=-\frac{1}{x}dx$$

$$\int\frac{1}{y}dy=-\int\frac{1}{x}dx$$

$\log|y|=-\log|x|+c \qquad \therefore \log|xy|=c$

$|xy|=e^c \qquad \therefore xy=\pm e^c$

$\pm e^c=C$　とおくと　$xy=C$

$$\therefore \quad y=\frac{C}{x} \qquad (C \text{ は任意定数}) \quad \cdots③$$

これは斉次微分方程式②の一般解である。

③の C が定数ならば③は①の解にはならないから非斉次微分方程式①の解を求めるために③の定数 C を x の関数 u とみなして

$$y=\frac{u}{x}\cdots④$$

が①を満たすように関数 u を定めよう。

④より　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x\dfrac{du}{dx}-u}{x^2}$

これと④を①に代入して

$$\frac{x\dfrac{du}{dx}-u}{x^2}+\frac{1}{x}\cdot\frac{u}{x}=1-x^2$$

$$x\frac{du}{dx}=x^2(1-x^2) \qquad \therefore \frac{du}{dx}=x-x^3$$

$$\therefore u=\int(x-x^3)dx$$

$$u=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4+c$$

これを④に代入して

$$y=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4+c\right)$$

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^3+\frac{c}{x} \quad (c \text{ は任意定数})〃\cdots⑤$$

これが求める一般解である。

(2)　$x=-2$, $y=\dfrac{5}{2}$ を⑤に代入して

$$\frac{5}{2}=\frac{1}{2}\cdot(-2)-\frac{1}{4}\cdot(-2)^3+\frac{c}{-2}$$

$\therefore$　$c=-3$　　これを⑤に代入して

$$\therefore y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{x} \quad 〃$$

これが求める特殊解である。

[別解]　$P(x)=\dfrac{1}{x}$, $Q(x)=1-x^2$ を

1 階線形微分方程式の一般解の公式

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left\{\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx+c\right\}$$

に代入して

$$y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left\{\int e^{\int\frac{1}{x}dx}(1-x^2)dx+c\right\}$$

ここで　$\displaystyle\int\frac{1}{x}dx=log|x|$

$e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\log|x|=|x|}$　であるから

$$y=\frac{1}{|x|}\left\{\int|x|(1-x^2)dx+c\right\}$$

$$=\frac{1}{x}\left\{\int(x-x^3)dx+c\right\}$$

$$\therefore \quad y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^3+\frac{c}{x} \quad (c \text{ は任意定数}) \quad 〃$$

これが求める一般解で、⑤と同じである。