１階線形　$\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)\quad\Longrightarrow\quad$ 定数変化法

$\boxed{\text{例 10}}$　微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}+y\cos x=e^{-\sin x}$　について次の問に答えよ。

(1)　一般解を求めよ。

(2)　初期条件「 $x=\pi$ のとき $y=-\dfrac{\pi}{2}$ 」を満たす特殊解を求めよ。

(解)

(1)　$\dfrac{dy}{dx}+y\cos x=e^{-\sin x}\quad\cdots①$

非斉次微分方程式 ① の斉次微分方程式

$$\frac{dy}{dx}+y\cos x=0\quad\cdots②$$

を変形して

$$\frac{dy}{dx}=-y\cos x\qquad\therefore\frac{1}{y}dy=-\cos x dx$$

$$\int\frac{1}{y}dy=-\int\cos x dx$$

$$\log|y|=-\sin x+c$$

$$|y|=e^{-\sin x+c}$$

$$\therefore y=\pm e^{c}e^{-\sin x}$$

$\pm e^{c}=C$　とおくと

$$\therefore y=Ce^{-\sin x}\quad(C\text{ は任意定数})\quad\cdots③$$

これは斉次微分方程式②の一般解である。
③の C が定数ならば③は①の解にはならない
から非斉次微分方程式①の解を求めるために
③の定数 C を x の関数 u とみなして

$$y=ue^{-\sin x}\cdots④$$

が①を満たすように関数 u を定めよう。
④より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}e^{-\sin x}+ue^{-\sin x}(-\cos x)$$

これと④を①に代入して

$$\frac{du}{dx}e^{-\sin x}-ue^{-\sin x}\cos x+ue^{-\sin x}\cos x$$

$$=e^{-\sin x}$$

$$\frac{du}{dx}e^{-\sin x}=e^{-\sin x}\qquad\therefore\frac{du}{dx}=1$$

$$\int du=\int dx\qquad\therefore\quad u=x+c$$

これを④に代入して

$$y=(x+c)e^{-\sin x}\quad(c\text{ は任意定数})\ 〃\cdots⑤$$

これが求める一般解である。

(2)　$x=\pi$, $y=-\dfrac{\pi}{2}$ を⑤に代入して

$$-\frac{\pi}{2}=(\pi+c)e^{-\sin\pi}$$

$\therefore\quad c=-\dfrac{3}{2}\pi$　　これを⑤に代入して

$$\therefore y=\left(x-\frac{3}{2}\pi\right)e^{-\sin x}\quad〃$$

これが求める特殊解である。

[別解]　$P(x)=\cos x$, $Q(x)=e^{-\sin x}$ を

１階線形微分方程式の一般解の公式

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left\{\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx+c\right\}$$

に代入して

$$y=e^{-\int\cos x dx}\left\{\int e^{\int\cos x dx}e^{-\sin x}dx+c\right\}$$

ここで　$\displaystyle\int\cos x dx=\sin x$　であるから

$$y=e^{-\sin x}\left\{\int e^{\sin x}e^{-\sin x}dx+c\right\}$$

$$=e^{-\sin x}\left\{\int dx+c\right\}$$

$$\therefore\quad y=(x+c)e^{-\sin x}\quad(c\text{ は任意定数})\quad〃$$

これが求める一般解で、⑤と同じである。