ベルヌーイの微分方程式　$\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n \quad \Longrightarrow \quad$ 1階線形に変形

例 11　微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=x^2y^6$ 　の一般解を求めよ。

≪考え方≫

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n$$

この両辺を y^n で割ると

$$\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx}+P(x)\frac{1}{y^{n-1}}=Q(x)$$

$z=\dfrac{1}{y^{n-1}}$ 　とおくと

$$\frac{dz}{dx}=\frac{d}{dy}\frac{1}{y^{n-1}}\frac{dy}{dx}=-(n-1)\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{n-1}\frac{dz}{dx}$$

よって　$-\dfrac{1}{n-1}\dfrac{dz}{dx}+P(x)z=Q(x)$

$$\therefore \frac{dz}{dx}-(n-1)P(x)z=-(n-1)Q(x)$$

このようにベルヌーイの微分方程式は
1階線形微分方程式に変形できる。

(解)

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=x^2y^6 \quad \cdots ①$$

両辺を y^6 で割ると

$$\frac{1}{y^6}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{xy^5}=x^2 \quad \cdots ②$$

$z=\dfrac{1}{y^5} \quad \cdots ③$ 　　とおくと

$$\frac{dz}{dx}=\frac{d}{dy}\frac{1}{y^5}\cdot\frac{dy}{dx}=-5\cdot\frac{1}{y^6}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{1}{y^6}\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{5}\frac{dz}{dx} \quad \cdots ④$$

③，④ を②に代入して

$$-\frac{1}{5}\frac{dz}{dx}+\frac{1}{x}z=x^2$$

$$\frac{dz}{dx}-\frac{5}{x}z=-5x^2 \quad \cdots ⑤$$

これは1階線形微分方程式である。
非斉次微分方程式 ⑤ の斉次微分方程式

$$\frac{dz}{dx}-\frac{5}{x}z=0 \quad \cdots ⑥$$

を変形して

$$\frac{dz}{dx}=\frac{5z}{x} \qquad \therefore \int\frac{1}{z}dz=5\int\frac{1}{x}dx$$

$$\log|z|=5\log|x|+c \qquad \therefore \log\left|\frac{z}{x^5}\right|=c$$

$\therefore \dfrac{z}{x^5}=\pm e^c$ 　　ここで　$\pm e^c=C$ 　とおくと

$\therefore \quad z=Cx^5$ 　(C は任意定数)$\cdots$⑦

これは斉次微分方程式⑥の一般解である。
⑦の C が定数ならば⑦は⑤の解にはならない
から非斉次微分方程式⑤の解を求めるために
⑦の定数 C を x の関数 u とみなして

$$z=ux^5 \quad \cdots ⑧$$

が⑤を満たすように関数 u を定めよう。

⑧より　　$\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{du}{dx}\cdot x^5+u\cdot 5x^4$

これと⑧を⑤に代入して

$$x^5\frac{du}{dx}+5x^4u-\frac{5}{x}\cdot ux^5=-5x^2$$

$$x^5\frac{du}{dx}=-5x^2 \qquad \therefore \frac{du}{dx}=-5\cdot\frac{1}{x^3}$$

$$u=-5\int\frac{1}{x^3}dx=\frac{5}{2x^2}+c$$

これを⑧に代入して

$z=\dfrac{5}{2}x^3+cx^5$ 　(c は任意定数)　〃

これが⑤の一般解であり、これに③を代入すると

$\therefore \quad \dfrac{1}{y^5}=\dfrac{5}{2}x^3+cx^5$ 　(c は任意定数)　〃

これが求める一般解である。