ベルヌーイの微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n \quad \Longrightarrow \quad$ １階線形に変形

例 12　微分方程式 $x\dfrac{dy}{dx}+y=y^2\log x$ 　について次の問に答えよ。

(1)　一般解を求めよ。

(2)　初期条件「$x=e^2$ のとき $y=-1$」を満たす特殊解を求めよ。

(解)

(1)　$x\neq 0$ であるから

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=\frac{y^2}{x}\log x \quad \cdots ①$$

両辺を y^2 で割ると

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{xy}=\frac{1}{x}\log x \quad \cdots ②$$

$z=\dfrac{1}{y}\quad\cdots ③$　　とおくと

$$\frac{dz}{dx}=\frac{d}{dy}\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}=-\frac{dz}{dx} \quad \cdots ④$$

③，④ を②に代入して

$$-\frac{dz}{dx}+\frac{1}{x}z=\frac{1}{x}\log x$$

$$\frac{dz}{dx}-\frac{1}{x}z=-\frac{1}{x}\log x \quad \cdots ⑤$$

これは１階線形微分方程式である。
非斉次微分方程式 ⑤ の斉次微分方程式

$$\frac{dz}{dx}-\frac{1}{x}z=0 \quad \cdots ⑥$$

を変形して

$$\frac{dz}{dx}=\frac{z}{x} \qquad \therefore \int\frac{1}{z}dz=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\log|z|=\log|x|+c \qquad \therefore \log\left|\frac{z}{x}\right|=c$$

$\therefore \dfrac{z}{x}=\pm e^c$　　ここで　$\pm e^c=C$　とおくと

$\therefore \quad z=Cx \quad$ (C は任意定数)$\cdots ⑦$

これは斉次微分方程式⑥の一般解である。
⑦の C が定数ならば⑦は⑤の解にはならないから非斉次微分方程式⑤の解を求めるために⑦の定数 C を x の関数 u とみなして

$$z=ux \quad \cdots ⑧$$

が⑤を満たすように関数 u を定めよう。

⑧より　$\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{du}{dx}\cdot x+u\cdot 1$

これと⑧を⑤に代入して

$$x\frac{du}{dx}+u-\frac{1}{x}\cdot ux=-\frac{1}{x}\log x$$

$$x\frac{du}{dx}=-\frac{1}{x}\log x \qquad \therefore \frac{du}{dx}=-\frac{1}{x^2}\log x$$

$$u=-\int\frac{1}{x^2}\log x dx$$

これを部分積分で解くことにする。

$m'=-\dfrac{1}{x^2}$，$n=\log x$ とおくと

$m=\dfrac{1}{x}$，$n'=\dfrac{1}{x}$であるから

$$u=\frac{1}{x}\log x-\int\frac{1}{x^2}dx$$
$$=\frac{1}{x}\log x+\frac{1}{x}+c$$

これを⑧に代入して

$$z=\left(\frac{1}{x}\log x+\frac{1}{x}+c\right)x$$

$\therefore \quad z=\log x+cx+1 \quad$ (c は任意定数)　〃

これが⑤の一般解であり、これに③を代入すると

$\therefore \dfrac{1}{y}=\log x+cx+1$ (c は任意定数) 〃$\cdots ⑨$

これが求める一般解である。

(2) $x=e^2$，$y=-1$ を⑨に代入して

$$-1=\log e^2+ce^2+1 \qquad \therefore c=-\frac{4}{e^2}$$

$\therefore \quad \dfrac{1}{y}=\log x-\dfrac{4}{e^2}x+1$　〃

これが求める特殊解である。