$$\text{完全微分方程式}\quad f(x,y)dx+g(x,y)dy=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial x}$$

例 13　微分方程式 $(x^3+2xy+y)dx+(y^3+x^2+x)dy=0$　について次の問に答えよ。

(1)　一般解を求めよ。

(2)　初期条件「$x=3$ のとき $y=-2$」を満たす特殊解を求めよ。

≪完全微分方程式≫

$f(x,y)dx+g(x,y)dy=0$

が完全微分方程式であるための

必要十分条件は　$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial g}{\partial x}$　である。

一般解は

$F(x,y)=\displaystyle\int f(x,y)dx$ とおくとき

$$F(x,y)-\int\left\{\frac{\partial F}{\partial y}-g(x,y)\right\}dy=C$$

(C は任意定数)

(解)

(1)　$f(x,y)=x^3+2xy+y$

$g(x,y)=y^3+x^2+x$　とおくと

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2x+1 \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial x}=2x+1$$

よって　$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial g}{\partial x}$であるから

与えられた式は完全微分方程式である。

$$F(x,y)=\int f(x,y)dx$$

$$=\int(x^3+2xy+y)dx=\frac{x^4}{4}+x^2y+xy$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=x^2+x$$

これらを

完全微分方程式の一般解の公式

$$F(x,y)-\int\left\{\frac{\partial F}{\partial y}-g(x,y)\right\}dy=c$$

に代入して

$$\frac{x^4}{4}+x^2y+xy-\int\{(x^2+x)-(y^3+x^2+x)\}dy=c$$

$$\frac{1}{4}x^4+x^2y+xy+\int y^3dy=c$$

$$\frac{1}{4}x^4+x^2y+xy+\frac{1}{4}y^4=c$$

$$\therefore\frac{1}{4}(x^4+y^4)+x^2y+xy=c \quad 〃\cdots①$$

(c は任意定数)

これが求める一般解である。

(2)　$x=3$, $y=-2$　を①に代入して

$$\frac{1}{4}(81+16)+9\times(-2)+3\times(-2)=c$$

$$\therefore\quad c=\frac{1}{4}$$

これを①に代入して

$$\frac{1}{4}(x^4+y^4)+x^2y+xy=\frac{1}{4}$$

$$\therefore\quad x^4+y^4+4x^2y+4xy=1 \quad 〃$$

これが求める特殊解である。

(別解) 完全微分方程式であるから

$$\int(x^3+2xy+y)dx=\frac{1}{4}x^4+x^2y+xy$$

$$\int(y^3+x^2+x)dy=\frac{1}{4}y^4+x^2y+xy$$

これらの右辺を加え合わせるに当たって

x^2y と xy は共通であるから、１つだけとって

$$\therefore\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{4}y^4+x^2y+xy=c \quad (C\text{ は任意定数}) \quad 〃$$

これが求める一般解であり、①と同じである。