$$\boxed{\text{完全微分方程式}\quad f(x,y)dx+g(x,y)dy=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial x}}$$

例 14　次の微分方程式を一般解を求めよ。

(1) $\left(3x^2y^2+\dfrac{1}{x}\right)dx-\dfrac{1-2x^3y^2}{y}dy=0$　　　(2) $(y^2+e^x\sin y)dx+(2xy+e^x\cos y)dy=0$

(解)

(1)　$f(x,y)=3x^2y^2+\dfrac{1}{x}$

$g(x,y)=\dfrac{2x^3y^2-1}{y}$　とおくと

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=6x^2y$　，　$\dfrac{\partial g}{\partial x}=6x^2y$

よって　$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial g}{\partial x}$であるから

与えられた式は完全微分方程式である。

$$F(x,y)=\int f(x,y)dx$$

$$=\int(3x^2y^2+\frac{1}{x})dx=x^3y^2+\log|x|$$

$\dfrac{\partial F}{\partial y}=2x^3y$　　　これらを一般解の公式

$$F(x,y)-\int\left\{\frac{\partial F}{\partial y}-g(x,y)\right\}dy=c$$

に代入して

$$x^3y^2+\log|x|-\int\left\{2x^3y-\left(\frac{2x^3-1}{y}\right)\right\}dy=c$$

$$x^3y^2+\log|x|-\int\frac{1}{y}dy=c$$

$$x^3y^2+\log|x|-\log|y|=c$$

$x^3y^2+\log\left|\dfrac{x}{y}\right|=c$　(C は任意定数)　〃　…①

これが求める一般解である。

(別解)　完全微分方程式であるから

$$\int(3x^2y^2+\frac{1}{x})dx=x^3y^2+\log|x|$$

$$\int\frac{2x^3y^2-1}{y}dy=\int\left(2x^3y-\frac{1}{y}\right)dy=x^3y^2-\log|y|$$

これらの右辺を加え合わせるに当たって

x^3y^2 は共通であるから、１つだけとって

$$x^3y^2+\log|x|-\log|y|=c$$

$\therefore x^3y^2+\log\left|\dfrac{x}{y}\right|=c$　　(C は任意定数)　〃

これが求める一般解であり、①と同じである。

(2)　$f(x,y)=y^2+e^x\sin y$

$g(x,y)=2xy+e^x\cos y$　とおくと

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=2y+e^x\cos y$　，　$\dfrac{\partial g}{\partial x}=2y+e^x\cos y$

よって　$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial g}{\partial x}$であるから

与えられた式は完全微分方程式である。

$$F(x,y)=\int(y^2+e^x\sin y)dx=xy^2+e^x\sin y$$

$\dfrac{\partial F}{\partial y}=2xy+e^x\cos y$　　　これらを一般解の公式

$$F(x,y)-\int\left\{\frac{\partial F}{\partial y}-g(x,y)\right\}dy=c$$

に代入して

$$xy^2+e^x\sin y-\int\{(2xy+e^x\cos y)-(2xy+e^x\cos y)\}dy=c$$

$\therefore xy^2+e^x\sin y=C$　(C は任意定数)　〃　…②

これが求める一般解である。

(別解)　完全微分方程式であるから

$$\int(y^2+e^x\sin y)dx=xy^2+e^x\sin y$$

$$\int(2xy+e^x\cos y)dy=xy^2+e^x\sin y$$

これらの右辺を加え合わせるに当たって

xy^2 と $e^x\sin y$ は共通であるから、１つだけとって

$xy^2+e^x\sin y=c$　　(c は任意定数)　〃

これが求める一般解であり、②と同じである。