完全微分方程式　$f(x,y)dx+g(x,y)dy=0 \iff \dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial g}{\partial x}$

例 15　次の微分方程式を一般解を求めよ。

(1)　$(x^2+\log y)dx+\dfrac{x}{y}dy=0$　　(2)　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2xy-\cos x}{1-x^2}$

(解)

(1) $f(x,y)=x^2+\log y$, $g(x,y)=\dfrac{x}{y}$　とおくと

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{y}$　,　$\dfrac{\partial g}{\partial x}=\dfrac{1}{y}$

よって　$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial g}{\partial x}$であるから

与えられた式は完全微分方程式である。

$$F(x,y)=\int f(x,y)dx$$

$$=\int(x^2+\log y)dx=\frac{x^3}{3}+x\log y$$

$\dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{x}{y}$　　これらを一般解の公式

$$F(x,y)-\int\left\{\frac{\partial F}{\partial y}-g(x,y)\right\}dy=c$$

に代入して

$$\frac{x^3}{3}+x\log y-\int\left(\frac{x}{y}-\frac{x}{y}\right)dy=c$$

$\dfrac{1}{3}x^3+x\log y=C$　(C は任意定数)　〃　$\cdots$①

これが求める一般解である。

(別解)　完全微分方程式であるから

$$\int(x^2+\log y)dx=\frac{x^3}{3}+x\log y$$

$$\int\frac{x}{y}dy=x\log y$$

これらの右辺を加え合わせるに当たって
$x\log y$ は共通であるから、１つだけとって

$\therefore \dfrac{1}{3}x^3+x\log y=c$　(C は任意定数)　〃

これが求める一般解であり、①と同じである。

(2)　$(2xy-\cos x)dx-(1-x^2)dy=0$

$f(x,y)=2xy-\cos x$

$g(x,y)=x^2-1$　とおくと

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=2x$　,　$\dfrac{\partial g}{\partial x}=2x$

よって　$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial g}{\partial x}$であるから

与えられた式は完全微分方程式である。

$$F(x,y)=\int(2xy-\cos x)dx=x^2y+\sin x$$

$\dfrac{\partial F}{\partial y}=x^2$　　これらを一般解の公式

$$F(x,y)-\int\left\{\frac{\partial F}{\partial y}-g(x,y)\right\}dy=c$$

に代入して

$$x^2y-\sin x-\int\{(x^2-(x^2-1)\}dy=c$$

$x^2y-\sin x-\displaystyle\int dx=c$　　$\therefore x^2y-\sin x-y=c$

$\therefore x^2y-y-\sin x=c$　(c は任意定数)　〃　$\cdots$②

これが求める一般解である。

(別解)　完全微分方程式であるから

$$\int(2xy-\cos x)dx=x^2y-\sin x$$

$$\int(x^2-1)dy=x^2y-y$$

これらの右辺を加え合わせるに当たって
x^2y は共通であるから、１つだけとって

$x^2y-y-\sin x=c$　(c は任意定数)　〃

これが求める一般解であり、②と同じである。