$$\boxed{\text{微分方程式}\ \frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{Ax+By+C}\right)\ ,\ \frac{a}{A}=\frac{b}{B}\neq\frac{c}{C}\ \Longrightarrow\ ax+by=v\ \text{とおく}}$$

$\boxed{\text{例 16}}$　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1)　$(x-y+3)dx-(2x-2y+5)dy=0$　　　(2)　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x-2y+1}{6x-4y+1}$

確認事項

$\dfrac{dy}{dx}=f(\dfrac{ax+by+c}{Ax+By+C})$ の形

1.　完全微分方程式　$\Longrightarrow$　一般解の公式
2.　$\dfrac{a}{A}\neq\dfrac{b}{B}$　$\Longrightarrow$　同次形
3.　$\dfrac{a}{A}=\dfrac{b}{B}\neq\dfrac{c}{C}$　$\Longrightarrow$　変数分離形

(解)

(1) $f(x,y)=x-y+3$

$g(x,y)=-2x+2y-5$　とおくと

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=-1$　,　$\dfrac{\partial g}{\partial x}=-2$

よって　$\dfrac{\partial f}{\partial y}\neq\dfrac{\partial g}{\partial x}$ であるから

与えられた式は完全微分方程式ではない。

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-y+3}{2x-2y+5}$　,　$\dfrac{1}{2}=\dfrac{-1}{-2}\neq\dfrac{3}{5}$　だから

$v=x-y$ とおくと　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{v+3}{2v+5}$

$$\frac{dv}{dx}=1-\frac{dy}{dx}=1-\frac{v+3}{2v+5}=\frac{v+2}{2v+5}$$

$$\therefore\frac{2v+5}{v+2}dv=dx$$

$$\therefore\int\left(2+\frac{1}{v+2}\right)dv=\int dx$$

$2v+\log|v+2|=x+c$

$\therefore 2(x-y)+\log|x-y+2|=x+c$

$\log|x-y+2|=-x+2y+c$

$\therefore |x-y+2|=e^{-x+2y+c}$

$x-y+2=\pm e^{c}e^{-x+2y}$

$\pm e^{c}=C$　とおくと

$\therefore x-y+2=Ce^{-x+2y}$　(C は任意定数)　〃

これが求める一般解である。

(2)　$\dfrac{3}{6}=\dfrac{-2}{-4}\neq\dfrac{1}{1}$　であるから

$v=3x-2y$　とおくと　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{v+1}{2v+1}$

$$\frac{dv}{dx}=3-2\frac{dy}{dx}=3-2\cdot\frac{v+1}{2v+1}$$

$$\therefore\ \frac{dv}{dx}=\frac{3(2v+1)-2(v+1)}{2v+1}$$

$$\therefore\ \frac{2v+1}{4v+1}dv=dx$$

$$\int\left(\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{4v+1}\right)dv=\int dx$$

$$\int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{4v+1}\right)dv=\int dx$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}v+\frac{1}{8}\log|4v+1|=x+c$$

$$\frac{1}{2}(3x-2y)+\frac{1}{8}\log|4(3x-2y)+1|=x+c$$

$\log|12x-8y+1|=-4x+8y+8c$

$|12x-8y+1|=e^{-4x+8y+8c}$

$12x-8y+1=\pm e^{8c}e^{-4x+8y}$

$\pm e^{8c}=C$　とおくと

$12x-8y+1=Ce^{-4x+8y}$　〃

これが求める一般解である。

≪参考≫　与式を変形して

$(3x+y-5)dx-(x-3y-5)dy=0$

$f(x,y)=3x+y-5$　,　$g(x,y)=-x+3y+5$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=1$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}=-1$　$\therefore\dfrac{\partial f}{\partial y}\neq\dfrac{\partial g}{\partial x}$

よって、与式は完全微分方程式ではない。