$$\boxed{\text{微分方程式}\ \frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{Ax+By+C}\right)\ ,\ \frac{a}{A}\neq\frac{b}{B}\ \Longrightarrow\ \text{特性方程式}}$$

例 17　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1)　$(10x-4y+12)dx-(x+5y+3)dy=0$　　　(2)　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x+y-5}{x-3y-5}$

(解)

(1) $f(x,y)=10x-4y+12$, $g(x,y)=-x-5y-3$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=-4$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}=-1\ \therefore\dfrac{\partial f}{\partial y}\neq\dfrac{\partial g}{\partial x}$であるから

与えられた式は完全微分方程式ではない。

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{10x-4y+12}{x+5y+3}$　,　$\dfrac{10}{1}\neq\dfrac{-4}{5}$　だから

特性方程式

$$\begin{cases}10m-4n+12 &= 0\\ m+5n+3 &= 0\end{cases}$$

これを解いて　$m=-\frac{4}{3}$, $n=-\frac{1}{3}$

$x=X-\frac{4}{3}$　,　$y=Y-\frac{1}{3}$　とおくと

$$\frac{dy}{dx}=\frac{10(X-\frac{4}{3})-4(Y-\frac{1}{3})+12}{(X-\frac{4}{3})+5(Y-\frac{1}{3})+3}$$

$$\therefore\quad\frac{dy}{dx}=\frac{10X-4Y}{X+5Y}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dY}\cdot\frac{dY}{dX}}{\frac{dx}{dX}}=\frac{1\cdot\frac{dY}{dX}}{1}=\frac{dY}{dX}$$

$$\therefore\quad\frac{dY}{dX}=\frac{10-4\cdot\frac{Y}{X}}{1+5\cdot\frac{Y}{X}}\quad\Longleftarrow\quad\text{同次形}$$

$\frac{Y}{X}=u$　とおくと　　$Y=Xu$

$$\frac{dY}{dX}=u+X\frac{du}{dX}\ ,\ \therefore u+X\frac{du}{dX}=\frac{10-4u}{1+5u}$$

$$X\frac{du}{dX}=\frac{10-5u-5u^2}{1+5u}$$

$$-\frac{1}{5}\frac{5u+1}{u^2+u-2}du=\frac{1}{X}dX$$

$$-\frac{1}{5}\int\left(\frac{2}{u-1}+\frac{3}{u+2}\right)du=\int\frac{1}{X}dX$$

$-\frac{1}{5}\{2\log|u-1|+3\log|u+2|\}=\log|X|+c$

$2\log|u-1|+3\log|u+2|=-5\log|X|-5c$

$\log\{|u-1|^2|u+2|^3|X|^5\}=-5c$

$|u-1|^2|u+2|^3|X|^5=\pm e^{-5c}$

ここで　$u=\dfrac{Y}{X}=\dfrac{y+\frac{1}{3}}{x+\frac{4}{3}}=\dfrac{3y+1}{3x+4}$

$u-1=\dfrac{-3(x-y+1)}{3x+4}$, $u+2=\dfrac{3(2x+y+3)}{3x+4}$だから

$\therefore\frac{(-3)^2(x-y+1)^2}{(3x+4)^2}\cdot\frac{3^3(2x+y+3)^3}{(3x+4)^3}\left(x+\frac{4}{3}\right)^5=\pm e^{-5c}$

$\pm e^{-5c}=C$　とおくと、求める一般解は

$\therefore(x-y+1)^2(2x+y+3)^3=C$　〃

(C は任意定数)

(2)　$\frac{3}{-1}\neq\frac{1}{3}$　だから

特性方程式

$$\begin{cases}3m+n-5 &= 0\\ -m+3n+5 &= 0\end{cases}$$

これを解いて　$m=2$, $n=-1$

$x=X+2$　,　$y=Y-1$　とおくと

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3(X+2)+(Y-1)-5}{(X+2)-3(Y-1)-5}$$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{3X+Y}{X-3Y}\ ,\ \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dY}\cdot\frac{dY}{dX}}{\frac{dx}{dX}}=\frac{dY}{dX}$$

$$\therefore\quad\frac{dY}{dX}=\frac{3+\frac{Y}{X}}{1-3\cdot\frac{Y}{X}}\quad\Longleftarrow\quad\text{同次形}$$

$\frac{Y}{X}=u$　とおくと　　$Y=Xu$

$$\frac{dY}{dX}=u+X\frac{du}{dX}\quad\therefore u+X\frac{du}{dX}=\frac{3+u}{1-3u}$$

$$X\frac{du}{dX}=\frac{3(1+u^2)}{1-3u}\quad\therefore\frac{1-3u}{1+u^2}du=3\cdot\frac{1}{X}dX$$

$$\int\left(\frac{1}{1+u^2}-\frac{3}{2}\frac{2u}{1+u^2}\right)du=3\int\frac{1}{X}dX$$

$$\therefore\frac{1}{1}\cdot\mathrm{Tan}^{-1}u-\frac{3}{2}\log(1+u^2)=3\log X+c$$

$\mathrm{Tan}^{-1}\frac{y+1}{x-2}-\frac{3}{2}\log\left\{1+\left(\frac{y+1}{x-2}\right)^2\right\}=3\log|x-2|+c$

$\therefore 2\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{y+1}{x-2}-3\log(x^2+y^2-4x+2y+5)=c$　〃

(C は任意定数)

これが求める一般解である。