$$\boxed{\text{微分方程式}\ \frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{Ax+By+C}\right),\ \frac{a}{A}\neq\frac{b}{B}\ \Longrightarrow\ \text{特性方程式}}$$

$\boxed{\text{例 18}}$ 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{6x-2y-7}{2x+3y-6}$ の一般解を求めよ。

(解 1)

(1) $\dfrac{6}{2}\neq\dfrac{-2}{3}$ だから

特性方程式

$$\begin{cases} 6m-2n-7 &= 0 \\ 2m+3n-6 &= 0 \end{cases}$$

これを解いて　$m=\frac{3}{2}$, $n=1$

$x=X+\frac{3}{2}$,　$y=Y+1$ 　とおくと

$$\frac{dy}{dx}=\frac{6(X+\frac{3}{2})-2(Y+1)-7}{2(X+\frac{3}{2})+3(Y+1)-6}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{6X-2Y}{2X+3Y}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dY}\cdot\frac{dY}{dX}}{\frac{dx}{dX}}=\frac{1\cdot\frac{dY}{dX}}{1}=\frac{dY}{dX}$$

$$\therefore\ \frac{dY}{dX}=\frac{6-2\cdot\frac{Y}{X}}{2+3\cdot\frac{Y}{X}}\ \Longleftarrow\ \text{同次形}$$

$\frac{Y}{X}=u$　とおくと　　$Y=Xu$

$$\frac{dY}{dX}=u+X\frac{du}{dX}$$

$$\therefore u+X\frac{du}{dX}=\frac{6-2u}{2+3u}$$

$$X\frac{du}{dX}=\frac{6-4u-3u^2}{2+3u}$$

$$-\frac{3u+2}{3u^2+4u-6}du=\frac{1}{X}dX \Longleftarrow \text{変数分離形}$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{6u+4}{3u^2+4u-6}du=\int\frac{1}{X}dX$$

$$\int\frac{6u+4}{3u^2+4u-6}du=-2\int\frac{1}{X}dX$$

$$\log|3u^2+4u-6|=-2\log|X|+c$$

$$\log\left|\left\{3\left(\tfrac{y-1}{x-\frac{3}{2}}\right)^2+4\left(\tfrac{y-1}{x-\frac{3}{2}}\right)-6\right\}\left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2\right|=c$$

$$3(y-1)^2+4(y-1)(x-\tfrac{3}{2})-6(x-\tfrac{3}{2})^2=\pm e^c$$

$$-6x^2+4xy+3y^2+14x-12y-\frac{9}{2}=\pm e^c$$

$\mp e^c-\frac{9}{2}=C$　とおくと

$\therefore$　$6x^2-4xy-3y^2-14x+12y=C$　〃

(C は任意定数)

(解 2)　$(6x-2y-7)dx-(2x-3y+6)dy=0$

$f(x,y)=6x-2y-7$

$g(x,y)=-2x-3y+6$　とおくと

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=-2$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}=-2$ $\therefore\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial g}{\partial x}$ であるから

与えられた式は完全微分方程式である。

$$F(x,y)=\int(6x-2y-7)dx=3x^2-2xy-7x$$

とおくと　$\dfrac{\partial F}{\partial y}=-2x$　これらを

完全微分方程式の一般解の公式

$$F(x,y)-\int\left\{\frac{\partial F}{\partial y}-g(x,y)\right\}dy=c$$

に代入して

$$3x^2-2xy-7x-\int\{-2x-(-2x-3y+6)\}dy=c$$

$$3x^2-2xy-7x-(\frac{3}{2}y^2-6y)=c$$

$2c=C$　とおくと

$\therefore$　$6x^2-4xy-3y^2-14x+12y=C$　〃

(C は任意定数)

(解 3)　与式は完全微分方程式であるから

$$\int(6x-2y-7)dx=3x^2-2xy-7x$$

$$\int(-2x-3y+6)dy=-2xy-\frac{3}{2}y^2+6y$$

これらの右辺を加え合わせるに当たって

$-2xy$ は共通であるから、１つだけとって

$3x^2-2xy-\frac{3}{2}y^2-7x+6y=c$

$2c=C$　とおくと

$\therefore$　$6x^2-4xy-3y^2-14x+12y=C$　〃

(C は任意定数)