$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0\ ,\ \frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}\quad\Longleftrightarrow\quad \text{積分因数}$$

例 19　微分方程式 $ydx-xdy=0$　を完全微分方程式に変形して一般解を求めよ。

《備考》この問題は変数分離形で解いた方が楽であるが、積分因数の基本を学ぶ練習問題として選んだ。

≪積分因数≫

$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0\ \cdots$ Ⓐ
が完全微分方程式でないとき
$\frac{\partial}{\partial y}(\lambda P)=\frac{\partial}{\partial Q}(\lambda Q)$ を満たす λ を積分因数という。
λ をⒶの両辺に掛けると完全微分方程式になる。

1. λ を直感的に見付ける訓練が大切である。
2. $\dfrac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{Q}=\varphi(x)\cdots$ x のみの関数ならば
   $\lambda=e^{-\int\varphi(x)dx}$ という積分因数を持つ。
3. $\dfrac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P}=\varphi(y)\cdots$ y のみの関数ならば
   $\lambda=e^{\int\varphi(y)dy}$ という積分因数を持つ。
4. 一次独立な二つの積分因数 λ_1 , λ_2 を持つと
   $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=C$ (C は任意定数) はⒶの一般解である。

(解 1)　$ydx-xdy=0\cdots$ ①

$P(x,y)=y\ ,\ Q(x,y)=-x$　とおくと

$\frac{\partial P}{\partial y}=1\ ,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=-1\quad \therefore \frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$

①は完全微分方程式ではない。

そこで直感的に積分因数を求めてみよう。

①の両辺に $\lambda_1=\dfrac{1}{xy}$　を掛けると

$\dfrac{1}{x}dx-\dfrac{1}{y}dy=0\cdots$ ②　　$\lambda_1P=\dfrac{1}{x}\ ,\ \lambda_1Q=-\dfrac{1}{y}$

$\dfrac{\partial}{\partial y}\lambda_1P=0\ ,\ \dfrac{\partial}{\partial x}\lambda_1Q=0\quad\therefore\dfrac{\partial\lambda_1P}{\partial y}=\dfrac{\partial\lambda_1Q}{\partial x}$

よって、②は完全微分方程式であり、

$\lambda_1=\dfrac{1}{xy}$　は積分因数である。

$f(x,y)=\dfrac{1}{x}\ ,\ g(x,y)=-\dfrac{1}{y}$　とおくと

$F(x,y)=\displaystyle\int\frac{1}{x}dx=\log|x|\quad ,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=0$

これらを

完全微分方程式の一般解の公式

$$F(x,y)-\int\left\{\frac{\partial F}{\partial y}-g(x,y)\right\}dy=c$$

に代入して

$$\log|x|-\int\left\{0-(-\frac{1}{y})\right\}dy=c$$

$\log|x|-\log|y|=c\qquad\therefore\ \log\left|\frac{x}{y}\right|=c$

$\therefore\ \dfrac{x}{y}=\pm e^c\qquad \pm e^c=C$　とおくと

$\therefore\ \dfrac{x}{y}=C$　(C は任意定数)　〃

(解 2)　$ydx-xdy=0\cdots$ ①

$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{Q}=\frac{\frac{\partial}{\partial x}(-x)-\frac{\partial}{\partial y}y}{-x}=\frac{-1-1}{-x}=\frac{2}{x}$$

$$\lambda_2=e^{-\int\frac{2}{x}dx}=e^{-2\log|x|}=e^{\log\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{x^2}$$

①の両辺に $\lambda_2=\dfrac{1}{x^2}$　を掛けると

$\dfrac{y}{x^2}dx-\dfrac{1}{x}dy=0\cdots$ ②　　$\lambda_2P=\dfrac{y}{x^2}\ ,\lambda_2Q=-\dfrac{1}{x}$

$\frac{\partial}{\partial y}\lambda_2P=\frac{1}{x^2}\ ,\ \frac{\partial}{\partial x}\lambda_2Q=\frac{1}{x^2}\ \therefore\frac{\partial\lambda_2P}{\partial y}=\frac{\partial\lambda_2Q}{\partial x}$

よって、②は完全微分方程式であり、

$\lambda_2=\dfrac{1}{x^2}$　は積分因数である。

$f(x,y)=\dfrac{y}{x^2}\ ,\ g(x,y)=-\dfrac{1}{x}$　とおくと

$F(x,y)=\displaystyle\int\frac{y}{x^2}dx=-\frac{y}{x}\ ,\ \frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{1}{x}$

$\therefore-\dfrac{y}{x}-\displaystyle\int\left\{(-\frac{1}{x})-(-\frac{1}{x})\right\}dy=c_1$

$-\frac{y}{x}-c_2=c_1\qquad -c_2-c_1=C$　とおくと

$\therefore\ \dfrac{y}{x}=C$　(C は任意定数)　〃

(解 3)　$ydx-xdy=0\cdots$ ①

$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{p}=\frac{\frac{\partial}{\partial x}(-x)-\frac{\partial}{\partial y}y}{y}=\frac{-1-1}{y}=-\frac{2}{y}$$

$$\lambda_3=e^{\int(-\frac{2}{y})dy}=e^{-2\log|y|}=e^{\log\frac{1}{y^2}}=\frac{1}{y^2}$$

①の両辺に $\lambda_3=\dfrac{1}{y^2}$　を掛けると

$\dfrac{1}{y}dx-\dfrac{x}{y^2}dy=0\cdots$ ②　　$\lambda_3P=\dfrac{1}{y}\ ,\ \lambda_3Q=-\dfrac{x}{y^2}$

$\frac{\partial}{\partial y}\lambda_3P=-\frac{1}{y^2}\ ,\ \frac{\partial}{\partial x}\lambda_3Q=-\frac{1}{y^2}\ \therefore\frac{\partial\lambda_3P}{\partial y}=\frac{\partial\lambda_3Q}{\partial x}$

よって、②は完全微分方程式であり、

$\lambda_3=\dfrac{1}{y^2}$　は積分因数である。

$f(x,y)=\dfrac{1}{y}\ ,\ g(x,y)=-\dfrac{x}{y^2}$　とおくと

$F(x,y)=\displaystyle\int\frac{1}{y}dx=\frac{x}{y}\ ,\ \frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}$

$\therefore\dfrac{x}{y}-\displaystyle\int\left\{(-\frac{x}{y^2})-(-\frac{x}{y^2})\right\}dy=c$

$\therefore\ \dfrac{x}{y}=C$　(C は任意定数)　〃

(解 4)　$\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}=\dfrac{\frac{1}{xy}}{\frac{1}{x^2}}=\dfrac{x^2}{xy}=\dfrac{x}{y}=C$　おくと

$\therefore\ \dfrac{x}{y}=C$　(C は任意定数)　〃