$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0\ ,\ \frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}\quad\Longleftrightarrow\quad \text{積分因数}$$

例 20　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1)　$(x^2\cos x-y)dx+xdy=0$　　　(2)　$(y^4+2y)dx+(xy^3+2y^4-4x)dy=0$

(解)

(1) $(x^2\cos x-y)dx+xdy=0\cdots$ ①

$P(x,y)=x^2\cos x-y\ ,\ Q(x,y)=x$ とおくと

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-1\ ,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=1\quad \therefore\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$$

①は完全微分方程式ではない。そこで

$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{Q}=\frac{1-(-1)}{x}=\frac{2}{x}$$

$$\lambda_1=e^{-\int\frac{2}{x}dx}=e^{-2\log|x|}=e^{\log\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{x^2}$$

①の両辺に積分因数 $\lambda_1=\dfrac{1}{x^2}$ を掛けると

$$\left(\cos x-\frac{y}{x^2}\right)dx+\frac{1}{x}dy=0\cdots②$$

$f(x,y)=\cos x-\dfrac{y}{x^2}\ ,\ g(x,y)=\dfrac{1}{x}$ とおくと

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{1}{x^2}\quad,\quad\frac{\partial g}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}\quad\therefore\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial x}$$

よって、②は完全微分方程式である。

$$F(x,y)=\int\left(\cos x-\frac{y}{x^2}\right)dx=\sin x+\frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{1}{x}$$

これらを

完全微分方程式の一般解の公式

$$F(x,y)-\int\left\{\frac{\partial F}{\partial y}-g(x,y)\right\}dy=c$$

に代入して

$$\sin x+\frac{y}{x}-\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)dy=c$$

$$\therefore\quad \sin x+\frac{y}{x}=C\qquad(C\text{ は任意定数})\quad〃$$

これが求める一般解である

(2) $(y^4+2y)dx+(xy^3+2y^4-4x)dy=0\cdots$ ③

$P(x,y)=y^4+2y$

$Q(x,y)=xy^3+2y^4-4x$ とおくと

$$\frac{\partial P}{\partial y}=4y^3+2\ ,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=y^3-4\quad\therefore\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$$

③は完全微分方程式ではない。そこで

$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P}=\frac{(y^3-4)-(4y^3+2)}{y^4+2y}=-\frac{3}{y}$$

$$\lambda_2=e^{\int(-\frac{3}{y})dy}=e^{(-3\log|y|)}=e^{\log\frac{1}{y^3}}=\frac{1}{y^3}$$

③の両辺に積分因数 $\lambda_2=\dfrac{1}{y^3}$ を掛けると

$$\left(y+\frac{2}{y^2}\right)dx+\left(x+2y-\frac{4x}{y^3}\right)dy=0\cdots④$$

$f(x,y)=y+\dfrac{2}{y^2}\ ,\ g(x,y)=x+2y-\dfrac{4x}{y^3}$ とおくと

$$\frac{\partial f}{\partial y}=1-\frac{4}{y^3}\quad,\quad\frac{\partial g}{\partial x}=1-\frac{4}{y^3}\quad\therefore\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial x}$$

よって、④は完全微分方程式である。

$$F(x,y)=\int\left(y+\frac{2}{y^2}\right)dx=xy+\frac{2x}{y^2}\ ,\ \frac{\partial F}{\partial y}=x-\frac{4x}{y^3}$$

これらを

完全微分方程式の一般解の公式

$$F(x,y)-\int\left\{\frac{\partial F}{\partial y}-g(x,y)\right\}dy=c$$

に代入して

$$xy+\frac{2x}{y^2}-\int\left\{\left(x-\frac{4x}{y^3}\right)-\left(x+2y-\frac{4x}{y^3}\right)\right\}dy=c$$

$$\therefore xy+\frac{2x}{y^2}+\int 2ydy=c$$

$$\therefore\quad xy+\frac{2x}{y^2}+y^2=c\qquad(c\text{ は任意定数})\quad〃$$

これが求める一般解である