$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0\ ,\ \frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}\quad\Longleftrightarrow\quad \text{積分因数}$$

例 21　微分方程式　$(x^2+y^2)dx-2xydy=0$　の一般解を求めよ。

≪積分因数 λ を求める≫

$(x^2+y^2)dx-2xydy=0$

$P(x,y)=x^2+y^2\ ,\ Q(x,y)=-2xy$　とおくと

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2y\ ,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=-2y\quad \therefore\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$$

①は完全微分方程式ではない。そこで

$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{Q}=\frac{(-2y)-2y)}{-2xy}=\frac{2}{x}$$

$$\lambda=e^{-\int\frac{2}{x}dx}=e^{-2\log|x|}=e^{\log\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{x^2}$$

(解 1)　$(x^2+y^2)dx-2xydy=0$

この両辺に $\dfrac{1}{x^2}$ を掛けると

$$\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)dx-\frac{2y}{x}dy=0\cdots①$$

$$f(x,y)=1+\frac{y^2}{x^2}\ ,\ g(x,y)=-\frac{2y}{x}\ \text{とおくと}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y}{x^2}\quad,\quad\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{2y}{x^2}\quad\therefore\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial x}$$

よって、①は完全微分方程式であるから

$$F(x,y)=\int F(x,y)=\int\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)dx=x-\frac{y^2}{x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{2y}{x}$$

これらを

完全微分方程式の一般解の公式

$$F(x,y)-\int\left\{\frac{\partial F}{\partial y}-g(x,y)\right\}dy=c$$

に代入して

$$x-\frac{y^2}{x}-\int\left\{-\frac{2y}{x}-\left(-\frac{2y}{x}\right)\right\}dy=c_1$$

$$\therefore x-\frac{y^2}{x}-c_2=c_1\qquad c_1+c_2=C\ \text{とおくと}$$

$$\therefore\quad x-\frac{y^2}{x}=C\qquad(C\ \text{は任意定数})\ 〃$$

(解 2)　$(x^2+y^2)dx-2xydy=0$

この両辺に $\dfrac{1}{x^2}$ を掛けると

$$\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)dx-\frac{2y}{x}dy=0\cdots①$$

$$f(x,y)=1+\frac{y^2}{x^2}\ ,\ g(x,y)=-\frac{2y}{x}\ \text{とおくと}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y}{x^2}\quad,\quad\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{2y}{x^2}\quad\therefore\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial x}$$

よって、①は完全微分方程式であるから

$$\int f(x,y)=\int\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)dx=x-\frac{y^2}{x}$$

$$\int g(x,y)=\int\left(-\frac{2y}{x}\right)dy=-\frac{y^2}{x}$$

これらを加え合わせるに当り、

共通な $-\dfrac{y^2}{x}$ は１つだけとると

$$\therefore\quad x-\frac{y^2}{x}=C\qquad(C\ \text{は任意定数})\ 〃$$

(解 3)　$(x^2+y^2)dx-2xydy=0$

この両辺に $\dfrac{1}{x^2}$ を掛けると

$$\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)dx-\frac{2y}{x}dy=0$$

$\dfrac{y}{x}=u$ とおくと　$(1+u^2)dx-2udy=0$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{1+u^2}{2u}$$

$$y=xu\ \text{より}\quad\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$$

$$\therefore u+x\frac{du}{dx}=\frac{1+u^2}{2u}\qquad\therefore x\frac{du}{dx}=\frac{1-u^2}{2u}$$

$$\int\frac{2u}{u^2-1}du=-\int\frac{1}{x}dx$$

$$\log|u^2-1|=-\log|x|+c$$

$$\therefore\log\left|x\left(\frac{y^2}{x^2}-1\right)\right|=c$$

$$\frac{y^2}{x}-x=\pm e^c\ ,\quad\pm e^c=-C\ \text{とおくと}$$

$$\therefore\quad x-\frac{y^2}{x}=C\qquad(C\ \text{は任意定数})\ 〃$$