$$f(x,y)dx+g(x,y)dy=0 \quad \Longrightarrow \quad \text{変形} \quad \Longrightarrow \quad \text{置換}$$

例 22　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1)　$(3x^2y^3-6xy^2+5y)dx+(2x^5y^2-3x^2y)dy=0$　　(2)　$(x^2y-y^2)dx-x^3dy=0$

(解)

≪考え方≫

(1) は xy に着目して変形する。
(2) の積分因数は見つからないが、
両辺を y^2 で割ると $\dfrac{x}{y}$ が目に付く。

(1) $(3x^2y^3-6xy^2+5y)dx+(2x^5y^2-3x^2y)dy=0$

$y(3x^2y^2-6xy+5)dx+x(2x^2y^2-3xy)dy=0$

$xy=u$ とおくと

$y(3u^2-6u+5)dx+x(2u^2-3u)dy=0$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3u^2-6u+5}{2u^2-3u}\cdot\frac{y}{x}$$

$$=-\frac{3u^2-6u+5}{2u^2-3u}\cdot\frac{u}{x^2}=-\frac{3u^2-6u+5}{x^2(2u-3)}$$

$y=\dfrac{u}{x}$ より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{du}{dx}\cdot x-u\cdot 1}{x^2}$$

$$\therefore \frac{x\frac{du}{dx}-u}{x^2}=-\frac{3u^2-6u+5}{x^2(2u-3)}$$

$$x\frac{du}{dx}=u-\frac{3u^2-6u+5}{2u-3}$$

$$x\frac{du}{dx}=-\frac{u^2-3u+5}{2u-3}$$

$$\int\frac{2u-3}{u^2-3u-5}du=-\int\frac{1}{x}dx$$

$\log|u^2-3u+5|=-\log|x|+c$

$\log|x(u^2-3u+5)|=c$

$\log|x(x^2y^2-3xy+5)|=c$

$x(x^2y^2-3xy+5)=\pm e^c$

$\pm e^c=C$ とおくと

$\therefore x(x^2y^2-3xy+5)=C$　　(C は任意定数)

これが求める一般解である。

(2) $(x^2y-y^2)dx-x^3dy=0$

この両辺に $\dfrac{1}{y^2}$ を掛けると

$$\left(\frac{x^2}{y}-1\right)dx-\frac{x^3}{y^2}dy=0$$

$$\left(x\cdot\frac{x}{y}-1\right)dx=x\cdot\frac{x^2}{y^2}dy$$

$\dfrac{x}{y}=u$ とおくと

$(xu-1)dx=xu^2dy$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{xu-1}{xu^2}$$

$y=\dfrac{x}{u}$ より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{u-x\frac{du}{dx}}{u^2}$$

$$\therefore \frac{u-x\frac{du}{dx}}{u^2}=\frac{xu-1}{xu^2}$$

$$\frac{1}{u}-\frac{x}{u^2}\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}-\frac{1}{xu^2}$$

$$\frac{x}{u^2}\frac{du}{dx}=\frac{1}{xu^2}$$

$$\therefore \frac{du}{dx}=\frac{1}{x^2}$$

$$\therefore u=\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+c$$

$\therefore \dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{x}=c$　　(c は任意定数)

これが求める一般解である。