１階高次微分方程式 $f(x,y,y')=0$ $\iff$ 因数分解可能

例 23　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1)　$x^2y'^{\,2}+3xyy'+2y^2=0$　　　(2)　$y'^{\,3}-(2x+3y)y'^{\,2}+6xyy'=0$

(解)

≪考え方≫

因数分解をすることにより解を見出す。
１階微分方程式の任意定数は１つである。

(1) $x^2y'^{\,2}+3xyy'+2y^2=0$

左辺を因数分解すると

$(xy'+y)(xy'+2y)=0\cdots$①

$xy'+y=0$ または $xy'+2y=0$

i) $xy'+y=0$ のとき

$x\dfrac{dy}{dx}=-y$　　$\therefore \dfrac{1}{y}dy=-\dfrac{1}{x}dx$

$\therefore \displaystyle\int \frac{1}{y}dy=-\int \frac{1}{x}dx$

$\log|y|=-\log|x|+c$　　$\therefore \log|xy|=c$

$xy=\pm e^c$　，　$\pm e^c=C$ とおくと

$xy=C$　　$\therefore xy-C=0\cdots$②

ii) $xy'+2y=0$ のとき

$x\dfrac{dy}{dx}=-2y$　　$\therefore \dfrac{1}{y}dy=-2\dfrac{1}{x}dx$

$\displaystyle\int \frac{1}{y}dy=-2\int \frac{1}{x}dx$

$\log|y|=-2\log|x|+c$

$\log|y|+\log|x^2|=c$　　$\therefore \log|x^2y|=c$

$x^2y=\pm e^c$　，　$\pm e^c=C$ とおくと

$x^2y=C$　　$\therefore x^2y-C=0\cdots$③

よって、②,③と①から

$\therefore (xy-C)(x^2y-C)=0$ (C は任意定数) 〃

これが求める一般解である。

(2)　$y'^{\,3}-(2x+3y)y'^{\,2}+6xyy'=0$

左辺を因数分解すると

$y'(y'-2x)(y'-3y)=0\cdots$④

$y'=0$ ， $y'-2x=0$ ， $y'-3y=0$

i) $y'=0$ のとき

$y=C$　　$\therefore y-C=0\cdots$⑤

ii) $y'-2x=0$ のとき

$\dfrac{dy}{dx}=2x$　　$\therefore y=\displaystyle\int 2xdx$

$\therefore y=x^2+C$

$\therefore y-x^2-C=0\cdots$⑥

iii) $y'-3y=0$ のとき

$\dfrac{dy}{dx}=3y$　　$\therefore \displaystyle\int \frac{1}{y}dy=3\int dx$

$\log|y|=3x+c$　　$\therefore |y|=e^{3x+c}$

$y=\pm e^ce^{3x}$

$\pm e^c=C$ とおくと

$y=Ce^{3x}$

$\therefore y-Ce^{3x}=0\cdots$⑦

よって、⑤,⑥,⑦と④から

$\therefore (y-C)(y-x^2-C)(y-Ce^{3x})=0$ 〃
(C は任意定数)

これが求める一般解である。