１階高次微分方程式 $f(x,y,y')=0 \iff$ 微分してみる

$\boxed{\text{例 24}}$ 次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $(1-x^2)y'+xy-5=0$　　(2) $xy'^{\,2}-2yy'-x=0$

(解)

≪考え方≫
微分をすることにより解を見出す。
１階微分方程式の任意定数は１つである。

(1) $(1-x^2)y'+xy-5=0$

$y'=p$ とおくと

$(1-x^2)p+xy-5=0\cdots$①

y で解くと　$y=\dfrac{x^2-1}{x}p+\dfrac{5}{x}$

x で微分すると

$$y'=\left(1+\frac{1}{x^2}\right)p+\left(x-\frac{1}{x}\right)\frac{dp}{dx}-\frac{5}{x^2}$$

$$\frac{1}{x^2}p+\left(x-\frac{1}{x}\right)\frac{dp}{dx}-\frac{5}{x^2}=0$$

$$\frac{x^2-1}{x}\frac{dp}{dx}=\frac{5-p}{x^2}\quad\therefore -\frac{1}{p-5}dp=\frac{1}{x(x^2-1)}dx$$

$$-\int\frac{1}{p-5}dp=\int\frac{1}{x(x+1)(x-1)}dx$$

$$-\int\frac{1}{p-5}dp=\int\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$-\log|p-5|=-\log|x|+\tfrac{1}{2}\log|x+1|+\tfrac{1}{2}\log|x+1|+c$$

$$\log\left|\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}(p-5)\right|=-c$$

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}(p-5)=\pm e^{-c}$$

$\pm e^{-c}=C$ とおくと

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}(p-5)=C\quad\therefore p=\frac{Cx}{\sqrt{x^2-1}}+5$$

これを①に代入して p を消去すると

$$-(x^2-1)\left(\frac{Cx}{\sqrt{x^2-1}}+5\right)+xy-5=0$$

$-Cx\sqrt{x^2-1}-5x^2+5+xy-5=0$

$\therefore xy=5x^2+Cx\sqrt{x^2-1}$

$x\neq 0$ より

$\therefore y=5x+C\sqrt{x^2-1}$ (C は任意定数) 〃

これが求める一般解である。

(2) $xy'^{\,2}-2yy'-x=0$

$y'=p$ とおくと

$xp^2-2yp-x=0\ \cdots$②

y で解くと　$y=\dfrac{1}{2}\left(xp-\dfrac{x}{p}\right)$

x で微分すると

$$y'=\frac{1}{2}\left(1\cdot p+x\frac{dp}{dx}-\frac{1\cdot p-x\dfrac{dp}{dx}}{p^2}\right)$$

$$2p=p+x\frac{dp}{dx}-\frac{1}{p}+\frac{x}{p^2}\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{p^2+1}{p}=\frac{x(p^2+1)}{p^2}\frac{dp}{dx}$$

$$(p^2+1)\left(p-x\frac{dp}{dx}\right)=0$$

$p^2+1\neq 0$ より　$p-x\dfrac{dp}{dx}=0$

$$\int\frac{1}{p}dp=\int\frac{1}{x}dx$$

$\log|p|=\log|x|+c$

$\log\left|\dfrac{p}{x}\right|=c\quad\therefore\dfrac{p}{x}=\pm e^c$

$\pm e^c=C$ とおくと　$\therefore p=Cx$

これを②に代入して p を消去すると

$x(C^2x^2-2Cy-1)=0$

$x\neq 0$ のとき　$C^2x^2-2Cy-1=0$

$\therefore y=\dfrac{C}{2}x^2-\dfrac{1}{2C}$ (C は任意定数, $C\neq 0$) 〃

これが求める一般解である。

（これは $x=0$ のときも成り立つ）