１階高次微分方程式 $f(x,y,y')=0$ $\Longleftrightarrow$ 微分してみる

例 25　微分方程式 $y^2y'^{\,2}+3xy'-y=0$ の一般解と特異解を求めよ。

(解)

≪考え方≫
微分をすることにより解を見出す。
１階微分方程式の任意定数は１つである。

$$y^2y'^{\,2}+3xy'-y=0$$

$y'=p$ とおくと

$$y^2p^2+3xp-y=0\cdots①$$

x で解くと

$$x=\frac{y}{3p}-\frac{y^2p}{3}$$

y で微分すると

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{3}\left(\frac{1\cdot p-y\cdot\frac{dp}{dy}}{p^2}\right)-\frac{2y\cdot p+y^2\frac{dp}{dy}}{3}$$

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{3p}-\frac{y}{3p^2}\frac{dp}{dy}-\frac{2yp}{3}-\frac{y^2}{3}\frac{dp}{dy}$$

$$\therefore 3p=p-y\frac{dp}{dy}-2yp^3-y^2p^2\frac{dp}{dy}$$

$$2p(1+yp^2)+y(1+yp^2)\frac{dp}{dy}=0$$

$$(1+yp^2)\left(2p+y\frac{dp}{dy}\right)=0\cdots②$$

i) $2p+y\dfrac{dp}{dy}=0$ のとき

$$\int\frac{1}{p}dp=-2\int\frac{1}{y}dy$$

$$\log|p|=-2\log|y|+c$$

$$\log|y^2p|=c\qquad,\quad\therefore y^2p=\pm e^c$$

$\pm e^c=C$ とおくと

$$y^2p=C\qquad\therefore p=\frac{C}{y^2}$$

これをに①代入して p を消去する。

$$y^2\cdot\frac{C^2}{y^4}+3x\cdot\frac{C}{y^2}-y=0$$

$$\frac{C^2}{y^2}+\frac{3Cx}{y^2}-y=0$$

$$\therefore C^2+3Cx-y^3=0\qquad(C\text{ は任意定数})\quad〃\cdots③$$

これが求める一般解である。

≪考え方≫
②で、一般解を求めた条件からはずれた
条件より特異解が求められる場合がある。

ii) $1+yp^2=0$ のとき

$$p^2=-\frac{1}{y}\qquad\therefore p=\pm\sqrt{-\frac{1}{y}}$$

これを①に代入して

$$-y+3x\left(\pm\sqrt{-\frac{1}{y}}\right)-y=0$$

$$\pm3x\sqrt{-\frac{1}{y}}=2y\qquad\therefore 9x^2\left(-\frac{1}{y}\right)=4y^2$$

$$\therefore 9x^2+4y^3=0\quad〃$$

これは与式を満たすから、求める特異解である。

≪一般解から特異解を求める方法≫

③を C で偏微分すると

$$2C+3x=0\qquad\therefore c=-\frac{3}{2}x$$

これを③に代入すると

$$\frac{9}{4}x^2-\frac{9}{2}x^2-y^3=0$$

$$\therefore 9x^2+4y^3=0\quad〃$$

これは求める特異解である。

≪ y' の２次方程式の重解条件を用いる方法≫

①をの２次方程式と考え、重解条件より

$$D=(3x)^2-4\cdot y^2\cdot(-y)=0$$

$$\therefore 9x^2+4y^3=0\quad〃$$

これが求める特異解である。