クレローの微分方程式　$y = xy' + f(y')$

例 26　微分方程式 $y = xy' + \sqrt{1+y'^{\,2}}$ の一般解と特異解を求めよ。

≪理論≫

$$y = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

この両辺を x で微分すると

$$\frac{dy}{dx} = 1\cdot\frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{dx^2} + f'\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2}\left\{x + f'\left(\frac{dy}{dx}\right)\right\} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad \text{または} \quad x + f'\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

1)　$\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$　より　$\dfrac{dy}{dx} = c$ (定数)

これを与式に代入して

$y = cx + f(c)$　(c は任意定数)$\cdots$①

これが一般解である。

2)　$x + f'\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = 0$

これに　$\dfrac{dy}{dx} = c$　を代入して

$x + f'(c) = 0$　$\cdots$②

①,②から c を消去すると特異解が求まる。

まとめ

クレローの微分方程式

$y = xy' + f(y')$

の一般解は、$y' = c$　とおいて

$y = cx + f(c)$ (c は任意定数) $\cdots$①

これを c について偏微分すると

$0 = x + f'(c)$　$\cdots$②

①,②から c を消去すると
特異解が求まる。

(解)　$y = xy' + \sqrt{1+y'^{\,2}}$

両辺をで x 微分すると

$$y' = 1\cdot y' + xy'' + \frac{2y'}{2\sqrt{1+y'^{\,2}}}\cdot y''$$

$$\therefore \quad y''\left(x + \frac{y'}{\sqrt{1+y'^{\,2}}}\right) = 0$$

$$y'' = 0 \quad \text{または} \quad x + \frac{y'}{\sqrt{1+y'^{\,2}}} = 0$$

1)　$y'' = 0$ より　$y' = c$ (定数)

これを与式に代入すると、求める一般解は

$\therefore y = cx + \sqrt{1+c^2}$　(C は任意定数)　〃$\cdots$①

2)　$x + \dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^{\,2}}} = 0$　に $y' = c$ を代入して

$$x + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} = 0 \qquad \therefore x = -\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\cdots②$$

②を①に代入して

$$y = -\frac{c^2}{\sqrt{1+c^2}} + \sqrt{1+c^2} = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}$$

$$x^2 + y^2 = \left(-\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\right)^2 = 1$$

よって、求める特異解は　$x^2 + y^2 = 1$　〃

(別解)　$y' = c$ を与式に代入すると、一般解は

$y = cx + \sqrt{1+c^2}$　(c は任意定数)　〃$\cdots$③

この両辺を c で偏微分すると

$$0 = x + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \qquad \therefore x = -\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$$

これを③に代入して

$$y = -\frac{c^2}{\sqrt{1+c^2}} + \sqrt{1+c^2} = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}$$

$$x^2 + y^2 = \left(-\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\right)^2 = 1$$

よって、求める特異解は　$\therefore x^2 + y^2 = 1$　〃