クレローの微分方程式　$y = xy' + f(y')$

例 27　次の微分方程式の一般解と特異解を求めよ。

(1)　$y = xy' - \log y'$　　　　(2)　$e^{y-xy'} = y'^{\,2}$

(解)

(1)　$y = xy' + \log y'$

両辺を x で微分すると

$$y' = 1 \cdot y' + xy'' - \frac{1}{y'} \cdot y''$$

$$\therefore \quad y''\left(x - \frac{1}{y'}\right) = 0$$

$y'' = 0$　または　$x - \dfrac{1}{y'} = 0$

1)　$y'' = 0$ より　$y' = c$ (定数)

これを与式に代入すると

$\therefore y = cx - \log c$　(c は任意定数)　〃 $\cdots$ ①

これが求める一般解である。

2)　$x - \dfrac{1}{y'} = 0$　に $y' = c$ を代入して

$x - \dfrac{1}{c} = 0$　　$\therefore x = \dfrac{1}{c}$　$\cdots$ ②

②を①に代入して

$$y = \frac{1}{x} \cdot x - \log \frac{1}{x}$$

$y = 1 - \log x^{-1}$　　　$\therefore y = 1 + \log x$　〃

これが求める求める特異解である。

(別解)　$y' = c$ を与式に代入すると、
求める一般解は

$y = cx - \log c$　(c は任意定数)　〃 $\cdots$ ③

この両辺を c で偏微分すると

$0 = x - \dfrac{1}{c}$　　$\therefore c = \dfrac{1}{x}$

これを③に代入して

$$y = \frac{1}{x} \cdot x - \log \frac{1}{x}$$

$y = 1 + \log x$　〃

これが求める特異解である。

(2)　$e^{y-xy'} = y'^{\,2}$　　$\therefore y - xy' = \log y'^{\,2}$

$y = xy' + \log y'^{\,2} \cdots$ ④

これはクレローの微分方程式である。

④を x で微分すると

$$y' = 1 \cdot y' + xy'' + \frac{1}{y'^{\,2}} \cdot 2y' \cdot y''$$

$$\therefore \quad y''\left(x + \frac{2}{y'}\right) = 0$$

$y'' = 0$　または　$x + \dfrac{2}{y'} = 0$

1)　$y'' = 0$ より　$y' = c$ (定数)

これを④に代入すると、

$\therefore y = cx + \log c^2$

$\therefore e^{y-cx} = c^2$　(c は任意定数)　〃 $\cdots$ ⑤

これが求める一般解である。

2)　$x + \dfrac{2}{y'} = 0$　に $y' = c$ を代入して

$x + \dfrac{2}{c} = 0$　　$\therefore x = -\dfrac{2}{c}$　$\cdots$ ⑥

⑥を⑤に代入して

$e^{y-(-\frac{2}{x})x} = \left(-\dfrac{2}{x}\right)^2$　　$\therefore e^{y+2} = \dfrac{4}{x^2}$

$\therefore x^2 e^{y+2} = 4$　〃

これが求める求める特異解である。

(別解)　$y' = c$ を④に代入すると、
$y = cx + \log c^2$　　よって求める一般解は

$\therefore$　$e^{y-cx} = c^2$　(c は任意定数)　〃 $\cdots$ ⑦

この両辺を c で偏微分すると

$-xe^{y-cx} = 2c$　　$\therefore e^{y-cx} = -\dfrac{2c}{x}$

これを⑦に代入して

$-\dfrac{2c}{x} = c^2$　　$\therefore c = -\dfrac{2}{x}$

これを⑦に代入して整理すると

$\therefore x^2 e^{y+2} = 4$　〃

これが求める特異解である。