クレローの微分方程式　$y=xy'+f(y')$

例 28　次の微分方程式の一般解と特異解を求めよ。

(1)　$y=(x-5)y'+y'^{\,2}$　　　(2)　$xy'^{\,3}-yy'^{\,2}-1=0$

(解)

(1)　$y=(x-5)y'+y'^{\,2}$

$y=xy'-5y'+y'^{\,2}\cdots$①

これはクレローの微分方程式であるから
両辺を x で微分すると

$y'=1\cdot y'+xy''-5y''+2y'y''$

$\therefore\quad y''(x-5+2y')=0$

$y''=0$　または　$x-5+2y'=0$

1)　$y''=0$ のとき　$y'=c$ (定数)

これを①に代入すると

$\therefore y=c(x-5)+c^2$　(c は任意定数)　〃$\cdots$②

これが求める一般解である。

2)　$x-5+2y'=0$　に $y'=c$ を代入して

$x-5+2c=0$　　$\therefore c=-\dfrac{x-5}{2}$

これをを②に代入して

$$y=-\frac{x-5}{2}\cdot(x-5)+\left(-\frac{x-5}{2}\right)^2$$

$\therefore y=-\dfrac{1}{4}(x-5)^2$　〃

これが求める求める特異解である。

(別解)　$y'=c$ を与式に代入すると、
求める一般解は

$y=c(x-5)+c^2$　(c は任意定数)　〃$\cdots$③

この両辺を c で偏微分すると

$0=x-5+2c$　　$\therefore c=-\dfrac{x-5}{2}$

これを③に代入して

$$y=-\frac{x-5}{2}(x-5)+\left(-\frac{x-5}{2}\right)^2$$

$y=-\dfrac{1}{4}(x-5)^2$　〃

これが求める特異解である。

(2)　$xy'^{\,3}-yy'^{\,2}-1=0$

$y'\neq 0$ より　$y=xy'-\dfrac{1}{y'^{\,2}}\ \cdots$④

これはクレローの微分方程式であるから
④を x で微分すると

$$y'=1\cdot y'+xy''-\left(-\frac{2}{y'^{\,3}}\right)\cdot y''$$

$\therefore\quad y''\left(x+\dfrac{2}{y'^{\,3}}\right)=0$

$y''=0$　または　$x+\dfrac{2}{y'^{\,3}}=0$

1)　$y''=0$ のとき　$y'=c$ (定数)

これを④に代入すると、求める一般解は

$\therefore y=cx-\dfrac{1}{c^2}$　(c は任意定数)　〃$\cdots$⑤

2)　$x+\dfrac{2}{y'^{\,3}}=0$　に $y'=c$ を代入して

$x+\dfrac{2}{c^3}=0$　　$\therefore x=-\dfrac{2}{c^3}\ \cdots$⑥

⑥を⑤に代入して

$y=-\dfrac{2}{c^2}-\dfrac{1}{c^2}=-\dfrac{3}{c^2}$

$x^2=\dfrac{4}{c^6}$　,　$y^3=-\dfrac{27}{c^6}$

$\therefore 27x^2+4y^3=0$　〃

これが求める求める特異解である。

(別解)　$y'=c$ を④に代入すると、一般解は

$y=cx-\dfrac{1}{c^2}$　(c は任意定数)　〃$\cdots$⑦

この両辺を c で偏微分すると

$0=x+\dfrac{2}{c^3}$　　$\therefore x=-\dfrac{2}{c^3}$

これを⑦に代入して

$y=c(-\dfrac{2}{c^3})-\dfrac{1}{c^2}=-\dfrac{3}{c^2}$

これらから c を消去して整理すると

$\therefore 27x^2+4y^3=0$　〃

これが求める特異解である。