広義の Clairaut の微分方程式　$y = xf(y') + g(y')$

例 29　微分方程式 $y = 2xy' + y'^{\,2}$ の一般解と特異解を求めよ。

(解)

(1)　$y\,' = p$ とおくと

$y = 2xp + p^2 \cdots ①$

両辺を x で微分すると

$$y\,' = 2(1 \cdot p + x \cdot \frac{dp}{dx}) + 2p \cdot \frac{dp}{dx}$$

$$\therefore\ -2(x+p)\frac{dp}{dx} = p$$

i)　$p \neq 0$ のとき

$$-\frac{2(x+p)}{p}\frac{dp}{dx} = 1$$

$$-\frac{2x}{p} - 2 = \frac{dx}{dp}$$

$$\therefore \frac{dx}{dp} + \frac{2}{p} \cdot x = -2 \quad \cdots ②$$

これは線形微分方程式である。

$$\therefore x = e^{-\int \frac{2}{p}dp}\left\{\int e^{\int \frac{2}{p}dp}(-2)dp\right\}$$

$$= e^{-2\log|p|}\left\{\int e^{2\log|p|}(-2)dp\right\}$$

$$= e^{\log\frac{1}{p^2}}\left\{\int e^{\log p^2}(-2)dp\right\}$$

$$= \frac{1}{p^2}\left\{\int(-2p^2)dp\right\}$$

$$= \frac{1}{p^2}\left(-\frac{2}{3}p^3 + c\right)$$

$$\therefore x = -\frac{2}{3}p + \frac{c}{p^2}$$

$3xp^2 = -2p^3 + 3c$　,　$3c = C$ とおくと

$3xp^2 = -2p^3 + C \quad \cdots ③$

①より　$p^2 + 2xp - y = 0$

$$\therefore p = -x \pm \sqrt{x^2+y} \quad , \qquad p^2 = y - 2xp$$

これらを③に代入して

$3x(y-2xp) = -2p(y-2xp) + C$

$3xy - 6x^2p = -2py + 4x(y-2xp) + C$

$-xy + 2(x^2+y)p = C$

$$-xy + 2(x^2+y)(-x \pm \sqrt{x^2+y}) = C$$

$$\pm 2\sqrt{(x^2+y)^3} = 2x^3 + 3xy + C$$

$$\therefore 4(x^2+y)^3 = (2x^3+3xy+C)^2 \quad (C\text{ は任意定数})〃$$

これが求める一般解である。

ii)　$p = 0$ のとき　①から

　$y = 0$　〃

これが求める特異解である。

≪点線枠部分の別解≫

②の斉次微分方程式

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2x}{p} = 0 \quad \cdots ④ \qquad \text{を変形して}$$

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{2x}{p} \qquad \therefore \int \frac{1}{x}dx = -2\int \frac{1}{p}dp$$

$\log|x| = -2\log|p| + c$　　$\log|xp^2| = c$

$\therefore xp^2 = \pm e^c$　　$\pm e^c = C$ とおくと

$$\therefore x = \frac{C}{p^2} \quad (C\text{ は任意定数}) \cdots ⑤$$

これが④の一般解である。

この C が定数ならば⑤は②の解にはならない。

よって、非斉次微分方程式②の解を求めるために

C を p の関数 u とみなして

$x = \dfrac{u}{p^2}$ が②を満たすように関数 u を定めよう。

$$\frac{dx}{dp} = \frac{\frac{du}{dp}\cdot p^2 - u \cdot 2p}{p^4} = \frac{1}{p^2}\frac{du}{dp} - \frac{2x}{p}$$

これを②に代入して

$$\frac{1}{p^2}\frac{du}{dp} - \frac{2x}{p} + \frac{2x}{p} = -2 \qquad \therefore \frac{du}{dp} = -2p^2$$

$$u = -2\int p^2 dp = -2 \cdot \frac{p^3}{3} + c$$

$$\therefore xp^2 = -\frac{2}{3}p^3 + c \qquad \therefore x = -\frac{2}{3}p + \frac{c}{p^2}$$