$$\boxed{\text{Riccati の微分方程式 } \frac{dy}{dx}+P(x)+Q(x)y+R(x)y^2=0 \implies \text{特殊解利用}}$$

$\boxed{\text{例 30}}$　微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{2x-1}{x-1}y+y^2=0$ の一般解を求めよ。

(解)

$y=1$ のとき、$\dfrac{dy}{dx}=0$ だから与式を満たす。

よって、$y=1$ は１つの特殊解であるから
u を x の関数として、$y=1+u$ とおくと

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}\quad \text{である。}$$

これらを与式に代入して

$$\frac{du}{dx}+\frac{x}{x-1}-\frac{2x-1}{x-1}(1+u)+(1+u)^2=0$$

$$\frac{du}{dx}+\frac{x-(2x-1)}{x-1}-\frac{(2x-1)u}{x-1}+1+2u+u^2=0$$

$$\frac{du}{dx}-\frac{(2x-1)u}{x-1}+\frac{2(x-1)u}{x-1}+u^2=0$$

$$\frac{du}{dx}-\frac{u}{x-1}+u^2=0$$

$$\frac{du}{dx}-\frac{1}{x-1}\cdot u=-u^2$$

これはベルヌーイの微分方程式である。
よって、両辺を u^2 で割ると

$$\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx}-\frac{1}{x-1}\cdot\frac{1}{u}=-1$$

$\dfrac{1}{u}=v$ とおくと

$$\frac{dv}{dx}=\frac{dv}{du}\cdot\frac{du}{dx}=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx}$$

よって　$\dfrac{1}{u^2}\dfrac{du}{dx}=-\dfrac{dv}{dx}$　であるから

$$-\frac{dv}{dx}-\frac{1}{x-1}v=-1$$

$$\therefore \frac{dv}{dx}+\frac{1}{x-1}v=1\cdots①$$

これは線形微分方程式である。
①の斉次微分方程式

$$\frac{dv}{dx}+\frac{1}{x-1}v=0\quad\cdots②\qquad\text{を変形して}$$

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{v}{x-1}\qquad \therefore \int\frac{1}{v}dv=-\int\frac{1}{x-1}dx$$

$\log|v|=-\log|x-1|+c$　　$\log|v(x-1)|=c$
$\therefore v(x-1)=\pm e^c$　　$\pm e^c=C$ とおくと

$$\therefore v=\frac{C}{x-1}\quad (C\text{ は任意定数})\cdots③$$

これが②の一般解である。
この C が定数ならば③は①の解にはならない。
よって、非斉次微分方程式①の解を求めるために
C を x の関数 w とみなして

$$v=\frac{w}{x-1}\cdots④$$

が①を満たすように関数 w を定めよう。

$$\frac{dv}{dx}=\frac{\frac{dw}{dx}\cdot(x-1)-w\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{1}{x-1}\frac{dw}{dx}-\frac{w}{(x-1)^2}$$

これを①に代入して

$$\frac{1}{x-1}\frac{dw}{dx}-\frac{w}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}\cdot\frac{w}{x-1}=1$$

$$\therefore \frac{dw}{dx}=x-1$$

$$w=\int(x-1)dx=\frac{x^2}{2}-x+c$$

これを④に代入して

$$\therefore v=\frac{\frac{x^2}{2}-x+c}{x-1}=\frac{x^2-2x+2c}{2(x-1)}$$

$$\therefore u=\frac{2(x-1)}{x^2-2x+2c}$$

$$y=1+u=1+\frac{2x-2}{x^2-2x+2c}$$

$$\therefore y=\frac{x^2-2+2c}{x^2-2x+2c}\quad (C\text{ は任意定数})\quad〃$$

これが求める一般解である。