Riccati の微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}+P(x)+Q(x)y+R(x)y^2=0 \Longrightarrow$ 特殊解利用

例 31　微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{x-2}{x-x^2}\,y+\dfrac{1}{x^2-x^3}\,y^2=0$ について次の問に答えよ。

(1)　$y=x$ が１つの特殊解であることを示せ。

(2)　一般解を求めよ。

(解)

(1)　$y=x$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=1$ であるから

$$\frac{dy}{dx}+\frac{x-2}{x-x^2}\,y+\frac{1}{x^2-x^3}$$

$$=1+\frac{x-2}{x(1-x)}\cdot x+\frac{1}{x^2(1-x)}\cdot x^2$$

$$=\frac{1-x}{1-x}+\frac{x-2}{x-1}+\frac{1}{x-1}=0$$

よって、$y=x$ は１つの特殊解である。

(2)　$y=x$ が１つの特殊解であるから
u を x の関数として　$y=xu$ とおくと

$$\frac{dy}{dx}=1\cdot u+x\cdot\frac{du}{dx}$$

これらを与式に代入して

$$u+x\frac{du}{dx}+\frac{x-2}{x(x-1)}xu+\frac{1}{x^2(x-1)}x^2u^2=0$$

$$u+x\frac{du}{dx}+\frac{(x-2)u}{1-x}+\frac{u^2}{1-x}=0$$

$$x\frac{du}{dx}-\frac{1}{1-x}\cdot u+\frac{u^2}{1-x}=0$$

$$\therefore \frac{du}{dx}+\frac{1}{x(x-1)}u=\frac{1}{x(x-1)}u^2$$

これはベルヌーイの微分方程式である。
よって、両辺を u^2 で割ると

$$\frac{1}{u^2}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{1}{x(x-1)}\cdot\frac{1}{u}=\frac{1}{x(x-1)}$$

$\dfrac{1}{u}=v$ とおくと　$\dfrac{dv}{dx}=-\dfrac{1}{u^2}\cdot\dfrac{du}{dx}$

$\therefore \dfrac{1}{u^2}\dfrac{du}{dx}=-\dfrac{dv}{dx}$　であるから

$$-\frac{dv}{dx}+\frac{1}{x(x-1)}v=\frac{1}{x(x-1)}$$

$$\therefore \frac{dv}{dx}-\frac{1}{x(x-1)}v=-\frac{1}{x(x-1)}$$

これは線形微分方程式である。

$P(x)=-\dfrac{1}{x(x-1)}$, $Q(x)=-\dfrac{1}{x(x-1)}$ とおいて

公式

$$v=e^{-\int P(x)dx}\left\{\int e^{\int P(x)dx}\cdot Q(x)dx\right\}$$

に代入して

$$v=e^{-\int\frac{-1}{x(x-1)}dx}\left\{\int e^{\int\frac{-1}{x(x-1)}dx}\left(-\frac{1}{x(x-1)}\right)dx\right\}$$

$$=e^{\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)dx}\left\{\int e^{\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}\right)dx}\frac{-1}{x(x-1)}dx\right\}$$

$$=e^{\log|x-1|-\log|x|}\left\{\int e^{\log|x|-\log|x-1|}\frac{-1}{x(x-1)}dx\right\}$$

$$=e^{\log\left|\frac{x-1}{x}\right|}\left\{\int e^{\log\left|\frac{x}{x-1}\right|}\frac{-1}{x(x-1)}dx\right\}$$

$$=\left|\frac{x-1}{x}\right|\left\{\int\left|\frac{x}{x-1}\right|\frac{-1}{x(x-1)}dx\right\}$$

$$=\frac{x-1}{x}\left\{\int\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx\right\}$$

$$=\frac{x-1}{x}\left(\frac{1}{x-1}+c\right)=\frac{1+c(x-1)}{x}$$

$$\therefore u=\frac{x}{1+c(x-1)}$$

$$\therefore \frac{y}{x}=\frac{x}{1+c(x-1)}$$

$y\{1+c(x-1)\}=x^2$　$\therefore y+cy(x-1)=x^2$

$\therefore y-x^2=cy(1-x)$　(c は任意定数)　〃

これが求める一般解である。