微分方程式の図形的応用

例 32　次の各問に答えよ。

(1)　直線群 $y=mx$ と直交する曲線群のうち点 $(2,-3)$ を通るものを求めよ。

(2)　放物線群 $y^2=4a(x+a)$ に直交する曲線群のうち点 $(0,-2)$ を通るものを求めよ。

(解)

(1)　$y=mx \quad \cdots \quad ①$

これを x で微分すると

$$\frac{dy}{dx}=m$$

これを①に代入すると

$$y=\frac{dy}{dx}\cdot x \quad \cdots \quad ②$$

これは直線群①の微分方程式である。

②に直交する曲線群の微分方程式を

求めるために、

②の $\dfrac{dy}{dx}$ のところに $-\dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$ を代入して

$$y=-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\cdot x$$

$\therefore xdx+ydy=0$

$$\int xdx+\int ydy=0$$

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=c \quad (c\text{は任意定数})$$

$\therefore x^2+y^2=2c$

$2c=a^2$　とおくと

$x^2+y^2=a^2 \quad \cdots \quad ③$

よって、円群③は直線群①に直交する。

③のうちで点 $(2,-3)$ を通るものは

$2^2+(-3)^2=a^2$　を満たすから

$\therefore a^2=13$

これを③に代入すると

求める曲線は

円　$x^2+y^2=13$　〃

(2)　$y^2=4a(x+a) \quad \cdots \quad ①$

この両辺を x で微分すると

$$2y\frac{dy}{dx}=4a \qquad \therefore y\frac{dy}{dx}=2a$$

これを①に代入すると

$$y^2=2xy\frac{dy}{dx}+y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$\therefore y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2x\frac{dy}{dx}-y=0\cdots②$$

これが①の微分方程式である。

よって、①に直交する曲線群の

微分方程式を求めるために

②の $\dfrac{dy}{dx}$ に $-\dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$ を代入して

$$y\left(-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right)^2+2x\left(-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right)-y=0$$

$$\therefore y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2x\frac{dy}{dx}-y=0\cdots③$$

よって、②と③は同じであるから

放物線群①に直交する曲線群は、

自分自身の放物線群①である。

よって、放物線群①のうちで、

点 $(0,-2)$ を通るものは

$(-2)^2=4a(0+a)$　を満たす。　$\therefore a=\pm1$

これを①に代入すると

$y^2=4\cdot(\pm1)(x\pm1)$

ゆえに求める曲線は

２放物線　$y^2=4(x+1)$，$y^2=-4(x-1)$　〃

≪参考≫

(2)　で求めた２つの放物線は、

点 $(0,-2)$ で直交することを確認せよ。