定数係数斉次線形微分方程式　$\dfrac{d^2y}{dx^2}+a\dfrac{dy}{dx}+by=0$ $(a,b$ は定数$)$

1)　特性方程式 $\lambda^2+a\lambda+b=0$ が異なる実数解 α,β をもつとき　$\Longrightarrow$　$y=C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x}$

例 1.1　微分方程式 $y''-3y'-10y=0$ ついて、 次の問に答えよ。
(1)　一般解を求めよ。　(2)　初期条件「$x=0$ のとき　$y=1$, $y'=3$」を満たす特殊解を求めよ。

(解)
(1)　特性方程式
$\lambda^2-3\lambda-10=0$
$(\lambda-5)(\lambda+2)=0$
$\therefore \lambda=5$, $\lambda=-2$
ゆえに求める一般解は

$y=C_1e^{5x}+C_2e^{-2x}$ $(C_1,C_2$は任意定数$)$ 〃

(2)　$y'=5C_1e^{5x}-2C_2e^{-2x}$
これらに $x=0$, $y=1$, $y'=3$ を代入して

$$\begin{cases} C_1+C_2=1 \\ 5C_1-2C_2=3 \end{cases}$$

これを解いて　$c_1=\frac{5}{7}$, $c_2=\frac{2}{7}$
よって、求める特殊解は
$y=\dfrac{5}{7}e^{5x}+\dfrac{2}{7}e^{-2x}$　〃

2)　特性方程式 $\lambda^2+a\lambda+b=0$ が重解 α をもつとき　$\Longrightarrow$　$y=(C_1+C_2x)e^{\alpha x}$

例 1.2　微分方程式 $y''+8y'+16y=0$ ついて、 次の問に答えよ。
(1)　一般解を求めよ。
(2)　境界条件「 $x=0$ のとき　$y=3$,　$x=\frac{1}{2}$ のとき　$y=\frac{1}{e^2}$ 」を満たす特殊解を求めよ。

(解)
(1)　特性方程式
$\lambda^2+8\lambda+16=0$
$(\lambda+4)^2=0$
$\therefore \lambda=-4$, (重解)
ゆえに求める一般解は

$y=(C_1+C_2x)e^{-4x}$ $(C_1,C_2$は任意定数$)$ 〃

(2)　$x=0,y=3$ のとき $(C_1+C_2\cdot 0)e^0=3$
$x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{e^2}$ のとき $(c_1+\frac{1}{2}C_2)e^{-2}=\frac{1}{e^2}$

$$\begin{cases} C_1=3 \\ C_1+\frac{1}{2}C_2=1 \end{cases}$$

これを解いて　$c_1=3,c_2=-4$
よって、求める特殊解は

$y=(3-4x)e^{-4x}$　〃

3)　特性方程式 $\lambda^2+a\lambda+b=0$ が共役な虚数解 $p\pm qi$ をもつとき　$\Longrightarrow$　$y=e^{px}(c_1\cos qx+c_2\sin qx)$

例 1.3　微分方程式 $y''-8y'+25y=0$ ついて、 次の問に答えよ。
(1)　一般解を求めよ。　(2)　初期条件「 $x=\frac{\pi}{6}$ のとき $y=e^{\frac{2}{3}\pi}$, $y'=e^{\frac{2}{3}\pi}$ 」を満たす解を求めよ。

(解)
(1)　特性方程式
$\lambda^2-8\lambda+25=0$
$\lambda=4\pm 3i$
ゆえに求める一般解は

$y=e^{4x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$ $(C_1,C_2$は任意定数$)$ 〃

(2) $y'=e^{4x}\{(4C_1+3C_2)\cos 3x+(-3C_1+4C_2)\sin 3x\}$
これらに $x=\frac{\pi}{6}$, $y=e^{\frac{2}{3}\pi}$, $y'=e^{\frac{2}{3}\pi}$
を代入して整理すると

$$\begin{cases} C_2=1 \\ -3C_1+4C_2=1 \end{cases}$$

これを解いて　$C_1=1$, $C_2=1$
よって、求める特殊解は
$y=e^{4x}(\cos 3x+\sin 3x)$　〃