定数係数非斉次線形微分方程式　$\dfrac{d^2y}{dx^2}+a\dfrac{dy}{dx}+by=R(x)$（$a, b$ は定数）

例 3　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1)　$\dfrac{d^2y}{dx^2}+6\dfrac{dy}{dx}+25y=104e^{3x}$　　　(2)　$\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{dy}{dx}-12y=e^{4x}$

(解)

(1)　非斉次微分方程式

$y''+6y'+25y=104e^{3x}$　$\cdots$①

に対し、斉次微分方程式

$y''+6y'+25y=0$　$\cdots$②

を考えると、

②の特性方程式は

$\lambda^2+6\lambda+25=0$

$\lambda=-3\pm\sqrt{9-25}$

$\therefore \lambda=-3\pm 4i$

ゆえに②の一般解は

$$y=e^{-3x}(C_1\cos 4x+C_2\sin 4x)$$

(C_1, C_2 は任意定数)

である。

次に、これと①の右辺から

①の特殊解の１つを

$y=pe^{3x}$ と予想すると

$y'=3pe^{3x}$

$y''=9pe^{3x}$

これらを①に代入して

$9pe^{3x}+6\cdot 3pe^{3x}+25\cdot pe^{3x}=104e^{3x}$

$52pe^{3x}=104e^{3x}$　　$\therefore p=2$

よって、①の１つの解は

$y=2e^{3x}$

ゆえに求める一般解は

$$y=2e^{3x}+e^{-3x}(C_1\cos 4x+C_2\sin 4x)\quad〃$$

(C_1, C_2 は任意定数)

(2)　非斉次微分方程式

$y''-y'-12y=e^{4x}$　$\cdots$③

に対し、斉次微分方程式

$y''-y'-12y=0$　$\cdots$④

を考えると、④の特性方程式は

$\lambda^2-\lambda-12=0$

$(\lambda+3)(\lambda-4)=0$

$\therefore \lambda=-3\ ,\ \lambda=4$

ゆえに④の一般解は

$$y=C_1e^{-3x}+C_2e^{4x}\ (C_1, C_2\text{は任意定数})$$

である。次にこれと③の右辺から

③の特殊解の１つを

$y=pxe^{4x}$ と予想すると

$y'=p(1\cdot e^{4x}+x\cdot 4e^{4x})=p(4x+1)e^{4x}$

$y''=p\{4\cdot e^{4x}+(4x+1)\cdot 4e^{4x}\}$

$\quad=8p(2x+1)e^{4x}$

これらを③に代入して

$8p(2x+1)e^{4x}-p(4x+1)e^{4x}-12pxe^{4x}=x^{4x}$

$7pe^{4x}=e^{4x}$　　$\therefore p=\dfrac{1}{7}$

よって、③の１つの解は

$y=\dfrac{1}{7}xe^{4x}$

である。ゆえに求める一般解は

$$y=\frac{1}{7}xe^{4x}+C_1e^{-3x}+C_2e^{4x}\quad〃$$

(C_1, C_2 は任意定数)

≪参考事項≫

③の１つに解を $y=pe^{4x}$ と予想すると
④の一般解 $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{4x}$ の
１つの項 C_2e^{4x} と線形独立でなくなる。
そこで、 C_2e^{4x} と線形独立になるように
$y=pxe^{4x}$ と予想したのである。