定数係数非斉次線形微分方程式　$\dfrac{d^2y}{dx^2}+a\dfrac{dy}{dx}+by=R(x)$ （a,b は定数）

例 4　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1)　$\dfrac{d^2y}{dx^2}-3\dfrac{dy}{dx}+2y=\cos x$　　　(2)　$\dfrac{d^2y}{dx^2}+4y=3\sin 2x$

(解)

(1)　非斉次微分方程式

$y''-3y'+2y=\cos x$　$\cdots$①

に対し、斉次微分方程式

$y''-3y'+2y=0$　$\cdots$②

を考えると、②の特性方程式は

$\lambda^2-3\lambda+2=0$　　$\therefore (\lambda-3)(\lambda-2)=0$

$\therefore \lambda=1\,,\ \lambda=2$

ゆえに②の一般解は

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}\quad (C_1,C_2\text{は任意定数})$$

である。次にこれと①の右辺から

①の特殊解の１つを

$y=p\sin x+q\cos x$　と予想すると

$y'=p\cos x-q\sin x$

$y''=-p\sin x-q\cos x$

これらを①に代入して

$(-p\sin x-q\cos x)-3(p\cos x-q\sin x)$

$\quad +2(p\sin x+q\cos x)=\cos x$

$(p+3q)\sin x+(-3p+q)\cos x=\cos x$

$$\begin{cases} p+3q=0 \\ -3p+q=1 \end{cases}$$

これを解いて、$p=-\dfrac{3}{10}$, $q=\dfrac{1}{10}$

よって、①の１つの解は

$$y=-\frac{3}{10}\sin x+\frac{1}{10}\cos x$$

ゆえに求める一般解は

$$y=\frac{1}{10}(-3\sin x+\cos x)+C_1e^x+C_2e^{2x}\quad〃$$

(C_1,C_2　は任意定数)

(2)　非斉次微分方程式

$y''+4y=3\sin 2x$　$\cdots$③

に対し、斉次微分方程式

$y''+4y=0$　$\cdots$④

を考えると、④の特性方程式は

$\lambda^2+4=0$　　$\therefore \lambda=\pm 2i$

ゆえに④の一般解は

$$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\ (C_1,C_2\text{は任意定数})$$

である。次にこれと③の右辺から

③の特殊解の１つを

$y=x(p\sin 2x+q\cos 2x)$　と予想すると

$y'=(p\sin 2x+q\cos 2x)+x(2p\cos 2x-2q\sin 2x)$

$\quad =(p-2qx)\sin 2x+(q+2px)\cos 2x$

$y''=-2q\sin 2x+(p-2qx)\cdot 2\cos 2x$

$\qquad +2p\cos 2x+(q+2px)(-2\sin 2x)$

$\quad =-4(px+q)\sin 2x+4(p-qx)\cos 2x$

これらを③に代入して

$-4(px+q)\sin 2x+4(p-qx)\cos 2x$

$\qquad +4x(p\sin 2x+q\cos 2x)=3\sin 2x$

$\therefore\ -4q\sin 2x+4p\cos 2x=3\sin 2x$

$$\begin{cases} -4q=3 \\ 4p=0 \end{cases}$$

これを解いて、　$p=0$, $q=-\frac{3}{4}$

よって、③の１つの解は

$$y=-\frac{3}{4}x\cos 2x$$

である。ゆえに求める一般解は

$$y=-\frac{3}{4}x\cos 2x+C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\quad〃$$

(C_1,C_2　は任意定数)

≪参考事項≫

③の１つに解を　$y=p\sin 2x+q\cos 2x$

と予想すると、④の一般解

$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$

と線形独立でなくなる。

そこで、線形独立になるように

$y=x(p\sin 2x+q\cos 2x)$　と予想した。