定数係数非斉次線形微分方程式　$\dfrac{d^2y}{dx^2}+a\dfrac{dy}{dx}+by=R(x)$ (a,b は定数)

例６　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1)　$\dfrac{d^2y}{dx^2}-3\dfrac{dy}{dx}+2y=e^{4x}\sin x$　　(2)　$\dfrac{d^2y}{dx^2}-6\dfrac{dy}{dx}+13y=e^{3x}\cos x$

(解)

(1)　非斉次微分方程式

$y''-3y'+2y=e^{4x}\sin x \quad \cdots①$

に対し、斉次微分方程式

$y''-3y'+2y=0 \quad \cdots②$

を考えると、②の特性方程式は

$\lambda^2-3\lambda+2=0 \qquad (\lambda-1)(\lambda-2)=0$

$\therefore \lambda=1\ ,\ \lambda=2$

ゆえに②の一般解は

$y=C_1e^x+C_2e^{2x}$ (C_1,C_2 は任意定数)

である。次にこれと①の右辺から

①の特殊解の１つを

$y=e^{4x}(p\sin x+q\cos x)$ と予想すると

$y'=4e^{4x}(p\sin x+q\cos x)+e^{4x}(p\cos x-q\sin x)$

$y''=16e^{4x}(p\sin x+q\cos x)+4e^{4x}(p\cos x-q\sin x)$

$\quad +4e^{4x}(p\cos x-q\sin x)+e^{4x}(-p\sin x-q\cos x)$

$\quad =15e^{4x}(p\sin x+q\cos x)+8e^{4x}(p\cos x-q\sin x)$

これらを①に代入して

$15e^{4x}(p\sin x+q\cos x)+8e^{4x}(p\cos x-q\sin x)$

$\quad -3\{4e^{4x}(p\sin x+q\cos x)+e^{4x}(p\cos x-q\sin x)\}$

$\quad +2e^{4x}(p\sin x+q\cos x)=e^{4x}\sin x$

$\therefore (5p-5q)e^{4x}\sin x+(5p+5q)e^{4x}=e^{4x}\sin x$

$$\begin{cases} 5p-5q=1 \\ 5p+5q=0 \end{cases}$$

これを解いて、$p=\frac{1}{10}$, $q=-\frac{1}{10}$

よって、①の１つの解は

$$y=e^{4x}\left(\frac{1}{10}\sin x-\frac{1}{10}\cos x\right)$$

ゆえに求める一般解は

$$y=\frac{1}{10}e^{4x}(\sin x-\cos x)+C_1e^x+C_2e^{2x} \ 〃$$

(C_1,C_2 は任意定数)

(2)　非斉次微分方程式

$y''-6y'+13y=e^{3x}\cos x \quad \cdots③$

に対し、斉次微分方程式

$y''-6y'+13y=0 \quad \cdots④$

を考えると、④の特性方程式は

$\lambda^2-6\lambda+13=0$

$\therefore \lambda=3\pm 2i$

ゆえに④の一般解は

$$y=e^{3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$$

(C_1,C_2 は任意定数)

である。次にこれと③の右辺から

③の特殊解の１つを

$y=e^{3x}(p\sin x+q\cos x)$ と予想すると

$y'=3e^{3x}(p\sin x+q\cos x)+e^{3x}(p\cos x-q\sin x)$

$y''=9e^{3x}(p\sin x+q\cos x)+3e^{3x}(pcosx-q\sin x)$

$\quad +3e^{3x}(p\cos x-q\sin x)+e^{3x}(-psinx-q\cos x)$

$\quad =8e^{3x}(p\sin x+q\cos x)+6e^{3x}(p\cos x-q\sin x)$

これらを③に代入して

$8e^{3x}(p\sin x+q\cos x)+6e^{3x}(p\cos x-q\sin x)$

$\quad -6\{3e^{3x}(p\sin x+q\cos x)+e^{3x}(p\cos x-q\sin x)\}$

$\quad +13e^{3x}(p\sin x+q\cos x)=e^{3x}\cos x$

$\therefore 3e^{3x}(p\sin x+q\cos x)=e^{3x}\cos x$

$$\begin{cases} 3p=0 \\ 3q=1 \end{cases}$$

これを解いて、$p=0$, $q=\frac{1}{3}$

よって、③の１つの解は

$$y=\frac{1}{3}x^{3x}\cos x$$

である。ゆえに求める一般解は

$$y=e^{3x}\left(\frac{1}{3}\cos x+C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right) \ 〃$$

(C_1,C_2 は任意定数)