定数係数非斉次線形微分方程式　$\dfrac{d^2y}{dx^2}+a\dfrac{dy}{dx}+by=R(x)$ (a,b は定数)

例 8　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1)　$\dfrac{d^2y}{dx^2}-4\dfrac{dy}{dx}+4y=4e^{3x}x-2\cos x$　　(2)　$\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{dy}{dx}+8y=5e^{x}+e^{2x}+\sin x$

(解) (1)　非斉次微分方程式

$y''-4y'+4y=4e^{3x}-2\cos x$　$\cdots$①

に対し、斉次微分方程式

$y''-4y'+4y=0$　$\cdots$②

を考えると、②の特性方程式は

$\lambda^2-4\lambda+4=0$　　$\therefore\ \lambda=2$ (重解)

ゆえに②の一般解は

$y=(C_1+C_2x)e^{2x}$ (C_1,C_2 は任意定数)$\cdots$③

i) $y''-4y'+4y=4e^{3x}$　$\cdots$④

この右辺と③から④の特殊解の１つを

$y=ae^{3x}$ と予想すると

$y'=3ae^{3x}$　,　$y''=9ae^{3x}$

これらを④に代入して

$9ae^{3x}-12ae^{3x}+4ae^{3x}=4e^{3x}$　　$\therefore\ a=4$

よって、④の特殊解の１つは

$y=4e^{3x}\cdots$　⑤

ii) $y''-4y'+4y=-2\cos x$　$\cdots$⑥

この右辺と③から⑥の特殊解の１つを

$y=p\sin x+q\cos x$ と予想すると

$y'=p\cos x-q\sin x$

$y''=-p\sin x-\cos x$

これらを⑥に代入して

$-(p\sin x+q\cos x)-4(p\cos x-q\sin x)$

$+4(p\sin x+q\cos x)=-2\cos x$

$(3p+4q)\sin x+(-4p+3q)\cos x=-2\cos x$

$$\begin{cases} 3p+4q=0 \\ -4p+3q=-2 \end{cases}$$

これを解いて、$p=\frac{8}{25},q=-\frac{6}{25}$

よって、⑥の１つの解は

$$y=\frac{8}{25}\sin x-\frac{6}{25}\cos x\cdots⑦$$

ゆえに ③, ⑤, ⑦ から求める一般解は

$$y=4e^{3x}+\frac{2}{25}(4\sin x-3\cos x)+(C_1+C_2x)e^{2x}〃$$

(C_1,C_2 は任意定数)

(2)　非斉次微分方程式

$y''-6y'+8y=5e^{x}+e^{2x}+\sin x$　$\cdots$①

に対し、斉次微分方程式

$y''-6y'+8y=0$　$\cdots$②

を考えると、②の特性方程式は

$\lambda^2-6\lambda+8=0$　　$\therefore\ \lambda=2$, $\lambda=4$

ゆえに②の一般解は

$y=C_1e^{2x}+C_2e^{4x}$ (C_1,C_2 は任意定数)$\cdots$③

i) $y''-6y'+8y=5e^{x}\cdots$④

この右辺と③から④の特殊解の１つを

$y=ae^{x}$ と予想すると、$y'=ae^{x}$, $y''=ae^{x}$

これらを④に代入して整理すると

$3ae^{x}=5e^{x}$　$\therefore\ a=\frac{5}{3}$

④の特殊解の１つは　$y=\frac{5}{3}e^{x}\cdots$⑤

ii) $y''-6y'+8y=e^{2x}\cdots$⑥

この右辺と③から⑥の特殊解の１つを

$y=bxe^{2x}$ と予想すると

$y'=b(1+2x)e^{2x}$, $y''=4b(1+x)e^{2x}$

これらを⑥に代入して整理すると

$-2be^{2x}=e^{2x}$　$\therefore\ b=-\frac{1}{2}$

⑥の特殊解の１つは　$y=-\frac{1}{2}xe^{2x}\cdots$⑦

iii) $y''-6y'+8y=\sin x\cdots$⑧

この右辺と③から⑧の特殊解の１つを

$y=p\sin x+q\cos x$ と予想すると

$y'=p\cos x-q\sin x$, $y''=-p\sin x-q\cos x$

これらを⑧に代入して整理すると

$(7p+6q)\sin x+(-6p+7q)\cos x=\sin x$

$$\begin{cases} 7p+6q=1 \\ -6p+7q=0 \end{cases}$$

これを解いて、$p=\frac{7}{85},q=\frac{6}{85}$

よって、⑧の特殊解の１つの解は

$$y=\frac{7}{85}\sin x+\frac{6}{85}\cos x\cdots⑨$$

ゆえに ③, ⑤, ⑦, ⑨ から求める一般解は

$$y=\frac{5}{3}e^{x}-\frac{1}{2}xe^{2x}+\frac{1}{85}(7\sin x+6\cos x)$$

$$+C_1e^{2x}+C_2e^{4x}〃$$ (C_1,C_2 は任意定数)