## 同次形線形微分方程式 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+ax\dfrac{dy}{dx}+by=R(x)$

オイラーの微分方程式と呼ばれ、$x=e^t$ とおいて変形すると、定数係数線形微分方程式が導かれる。

例 9 次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}-4y=0$ (2) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+5x\dfrac{dy}{dx}+4y=x^2$

(解)

(1) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}-4y=0$ $\cdots$①

$x=e^t$ とおくと $t=\log x$ $\therefore\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)=\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dx}\frac{dy}{dt}$$

$$=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

これらを①に代入して

$$x^2\left(-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}\right)+x\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)-4y=0$$

$$\therefore\ \frac{d^2y}{dt^2}-4y=0 \quad\cdots②$$

この斉次微分方程式の特性方程式は

$\lambda^2-4=0$ $\therefore\lambda=\pm2$

よって、②の一般解は

$$y=C_1e^{2t}+C_2e^{-2t}\quad(C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

$$y=C_1(e^t)^2+C_2\frac{1}{(e^t)^2}$$

$$\therefore y=C_1x^2+\frac{C_2}{x^2}\quad(C_1, C_2 \text{ は任意定数})\ 〃$$

これが求める一般解である。

(2) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+5x\dfrac{dy}{dx}+4y=x^2$ $\cdots$③

$x=e^t$ とおくと $t=\log x$ $\therefore\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)=\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dx}\frac{dy}{dt}$$

$$=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

これらを③に代入して

$$x^2\left(-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}\right)+5x\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)+4y=x^2$$

$$\therefore\ \frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+4y=e^{2t}\quad\cdots④$$

この線形微分方程式の斉次微分方程式は

$$\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+4y=0\quad\cdots⑤$$

である。この特性方程式は

$\lambda^2+4\lambda+4=0$ $\therefore\lambda=-2$ （重解）

よって、⑤の一般解は

$$y=(C_1+C_2t)e^{-2t}\ (C_1, C_2 \text{ は任意定数})\cdots⑥$$

これと④の右辺から、④の特殊解の 1 つを

$y=pe^{2t}$ と予想すると

$$\frac{dy}{dt}=2pe^{2t}\quad,\quad\frac{d^2y}{dt^2}=4pe^{2t}$$

これらを④に代入すると

$4pe^{2t}+4(2pe^{2t})+4(pe^{2t})=e^{2t}$ $\therefore p=\frac{1}{16}$

よって、④の解の 1 つは $y=\dfrac{1}{16}e^{2t}$

これと⑥から、④の一般解は

$$y=\frac{1}{16}e^{2t}+(C_1+C_2t)e^{-2t}$$

$$\therefore y=\frac{1}{16}(e^t)^2+(C_1+C_2t)\frac{1}{(e^t)^2}$$

$$\therefore y=\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{x^2}(C_1+C_2\log x)\ 〃$$

$(C_1, C_2$ は任意定数)

これが求める一般解である。