同次形線形微分方程式　$x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+ax\dfrac{dy}{dx}+by=R(x)$

オイラーの微分方程式と呼ばれ、$x=e^t$ とおいて変形すると、定数係数線形微分方程式が導かれる。

例 10　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1)　$x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-4x\dfrac{dy}{dx}+6y=0$　　　(2)　$x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}+y=\log x$

(解)

(1) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-4x\dfrac{dy}{dx}+6y=0\ \cdots①$

$x=e^t$ とおくと　$t=\log x$　$\therefore\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)=\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dx}\frac{dy}{dt}$$

$$=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

これらを①に代入して

$$x^2\left(-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}\right)-4x\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)+6y=0$$

$$\therefore\ \frac{d^2y}{dt^2}-5\frac{dy}{dt}+6y=0\quad\cdots②$$

この斉次微分方程式の特性方程式は

$\lambda^2-5\lambda+6=0$　　$(\lambda-2)(\lambda-3)=0$

$\therefore\lambda=2\ ,\ \lambda=3$

よって、②の一般解は

$$y=C_1e^{2t}+C_2e^{3t}\quad(C_1,C_2\text{ は任意定数})$$

$$y=C_1(e^t)^2+C_2(e^t)^3$$

$$\therefore y=C_1x^2+C_2x^3\quad(C_1,C_2\text{ は任意定数})\ 〃$$

これが求める一般解である。

(2) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}+y=\log x\ \cdots③$

$x=e^t$ とおくと　$t=\log x$　$\therefore\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)=\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dx}\frac{dy}{dt}$$

$$=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

これらを③に代入して

$$x^2\left(-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}\right)-x\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)+y=\log x$$

$$\therefore\ \frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+y=t\quad\cdots④$$

この線形微分方程式の斉次微分方程式は

$$\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+y=0\quad\cdots⑤$$

である。この特性方程式は

$\lambda^2-2\lambda+1=0$　　$\therefore\lambda=1$（重解）

よって、⑤の一般解は

$$y=(C_1+C_2t)e^t\ (C_1,C_2\text{ は任意定数})\cdots⑥$$

これと④の右辺から、④の特殊解の 1 つを

$y=at+b$ と予想すると

$$\frac{dy}{dt}=a\quad,\quad\frac{d^2y}{dt^2}=0$$

これらを④に代入すると　$0-2a+at+b=t$

$$\begin{cases}a=1\\-2a+b=0\end{cases}$$

これを解いて　$a=1\quad,\quad b=2$

よって、④の解の 1 つは $y=t+2$

これと⑥から、④の一般解は

$$y=(t+2)+(C_1+C_2t)e^t$$

$$\therefore y=\log x+2+(C_1+C_2\log x)x$$

$$\therefore y=\log x+2+C_1x+C_2x\log x\ 〃$$

$(C_1,C_2$ は任意定数)

これが求める一般解である。