同次形線形微分方程式　$(px+q)^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+a(px+q)\dfrac{dy}{dx}+by=R(x)$

オイラーの微分方程式と呼ばれ、$px+q=e^t$ とおいて変形すると、定数係数線形微分方程式が導かれる。

例 11　次の微分方程式の一般解を求めよ。

$$(2x+3)^2\frac{d^2y}{dx^2}-2(2x+3)\frac{dy}{dx}-12y=4x+10$$

(解)

$$(2x+3)^2\frac{d^2y}{dx^2}-2(2x+3)\frac{dy}{dx}-12y=4x+10 \quad \cdots ①$$

$2x+3=e^t$ とおくと　$t=\log(2x+3)$

$$\frac{dt}{dx}=\frac{2}{2x+3}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{2}{2x+3}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{2x+3}\frac{dy}{dt}\right)$$

$$=\frac{d}{dx}\frac{2}{2x+3}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{2}{2x+3}\cdot\frac{d}{dx}\frac{dy}{dt}$$

$$=-\frac{4}{(2x+3)^2}\frac{dy}{dt}+\frac{2}{2x+3}\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx}$$

$$=-\frac{4}{(2x+3)^2}\frac{dy}{dt}+\frac{4}{(2x+3)^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

これらを①に代入して

$$(2x+3)^2\left(-\frac{4}{(2x+3)^2}\frac{dy}{dt}+\frac{4}{(2x+3)^2}\frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

$$-2(2x+3)\left(\frac{2}{2x+3}\frac{dy}{dt}\right)-12y=2(2x+3)+4$$

$$4\frac{d^2y}{dt^2}-8\frac{dy}{dt}-12y=2e^t+4$$

$$\therefore\ \frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}-3y=\frac{1}{2}e^t+1 \quad \cdots ②$$

この線形微分方程式の斉次微分方程式は

$$\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}-3y=0 \quad \cdots ③$$

である。③の特性方程式は

$\lambda^2-2\lambda-3=0$　　$(\lambda-3)(\lambda+1)=0$

$\therefore\lambda=3$, $\lambda=-1$

よって、③の一般解は

$$y=C_1e^{3t}+C_2e^{-t} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数}) \cdots ④$$

これと②の右辺から、②の特殊解の 1 つを

$y=ae^t+b$ と予想すると

$$\frac{dy}{dt}=ae^t \quad , \quad \frac{d^2y}{dt^2}=ae^t$$

これらを②に代入すると

$$ae^t-2ae^t-3(ae^t+b)=\frac{1}{2}e^t+1$$

$$\therefore\ -4ae^t-3b=\frac{1}{2}e^t+1$$

$$\begin{cases} -4a=\dfrac{1}{2} \\ -3b=1 \end{cases}$$

これを解いて　$a=-\dfrac{1}{8}$, $b=-\dfrac{1}{3}$

よって、②の解の 1 つは

$$y=-\frac{1}{8}e^t-\frac{1}{3}$$

これと④から、②の一般解は

$$y=-\frac{1}{8}e^t-\frac{1}{3}+C_1e^{3t}+C_2e^{-t}$$

$$=-\frac{1}{8}e^t-\frac{1}{3}+C_1(e^t)^3+\frac{C_2}{e^t}$$

$$\therefore y=-\frac{1}{8}(2x+3)-\frac{1}{3}+C_1(2x+3)^3+\frac{C_2}{2x+3} \ /\!/$$

$(C_1, C_2$ は任意定数)

これが求める一般解である。