連立微分方程式

例 13　次の連立微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}-3\dfrac{dy}{dt}+2y=0 \\ \dfrac{dx}{dt}+4x-5\dfrac{dy}{dt}=0 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+2x+\dfrac{dy}{dt}+y=t \\ 5x+\dfrac{dy}{dt}+3y=e^t \end{cases}$

(解)

(1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}-3\dfrac{dy}{dt}+2y=0 & \cdots① \\ \dfrac{dx}{dt}+4x-5\dfrac{dy}{dt}=0 & \cdots② \end{cases}$

①－②　　$2\dfrac{dy}{dt}-4x+2y=0$

$x=\dfrac{1}{2}\dfrac{dy}{dt}+\dfrac{1}{2}y\cdots③$

$\therefore\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{2}\dfrac{d^2y}{dt^2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{dy}{dt}$

これを①に代入して

$\dfrac{1}{2}\dfrac{d^2y}{dt^2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{dy}{dt}-3\dfrac{dy}{dt}+2y=0$

$\therefore\dfrac{d^2y}{dt^2}-5\dfrac{dy}{dt}+4y=0\cdots④$

この斉次微分方程式の特性方程式は

$\lambda^2-5\lambda+4=0\quad\therefore\lambda=1,\ \lambda=4$

よって、④の一般解は

$y=C_1e^t+C_2e^{4t}$ (C_1,C_2は任意定数)

$\therefore\dfrac{dy}{dt}=C_1e^t+4C_2e^{4t}$

これらを③に代入し

$x=\frac{1}{2}(C_1e^t+4C_2e^{4t})+\frac{1}{2}(C_1e^t+C_2e^{4t})$

$\quad=C_1e^t+\frac{5}{2}C_2e^{4t}$

ゆえに求める一般解は

$\begin{cases} x=C_1e^t+\frac{5}{2}C_2e^{4t} \\ y=C_1e^t+C_2e^{4t} \end{cases}$

(C_1,C_2 は任意定数)　〃

(2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+2x+\dfrac{dy}{dt}+y=t & \cdots① \\ 5x+\dfrac{dy}{dt}+3y=e^t & \cdots② \end{cases}$

②から　$x=-\dfrac{1}{5}\dfrac{dy}{dt}-\dfrac{3}{5}y+\dfrac{1}{5}e^t\cdots③$

$\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{1}{5}\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{3}{5}\dfrac{dy}{dt}+\dfrac{1}{5}e^t$

これらを①に代入して

$\dfrac{1}{5}\left(-\dfrac{d^2y}{dt^2}-3\dfrac{dy}{dt}+e^t\right)$

$\quad+\dfrac{2}{5}\left(-\dfrac{dy}{dt}-3y+e^t\right)+\dfrac{dy}{dt}+y=t$

$\dfrac{d^2y}{dt^2}+y=3e^t-5t\cdots④$

この斉次微分方程式は

$\dfrac{d^2y}{dt^2}+y=0\cdots⑤$

である。この特性方程式は

$\lambda^2+1=0\qquad\therefore\lambda=\pm i$

よって、⑤の一般解は

$y=C_1\cos t+C_2\sin t$ (C_1,C_2は任意定数)$\cdots⑥$

これと④の右辺から、④の特殊解の１つを

$y=ae^t+bt$ と予想すると

$\dfrac{dy}{dt}=ae^t+b$　，　$\dfrac{d^2y}{dt^2}=ae^t$

これらを④に代入して

$2ae^t+bt=3e^t-5t\qquad\therefore a=\frac{3}{2},\ b=-5$

ゆえに④の１つの解は $y=\frac{3}{2}e^t-5t$

よって、④の一般解は

$y=\dfrac{3}{2}e^t-5t+C_1\cos t+C_2\sin t$

$\therefore\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{3}{2}e^t-5-C_1\sin t+C_2\cos t$

これらを③に代入して

$x=-\frac{1}{5}\left(\frac{3}{2}e^t-5-C_1\sin t+C_2\cos t\right)$

$\quad-\frac{3}{5}\left(\frac{3}{2}e^t-5t+C_1\cos t+C_2\sin t\right)+\frac{1}{5}e^t$

ゆえに求める一般解は

$\begin{cases} x=-e^t+3t+1 \\ \qquad-\frac{1}{5}(3C_1+C_2)\cos t+\frac{1}{5}(C_1-3C_2)\sin t \\ y=\frac{3}{2}e^t-5t+C_1\cos t+C_2\sin t \end{cases}$

(C_1,C_2 は任意定数)　〃