級数を用いて微分方程式の一般解を求める

例 14　級数を用いて、微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=x+2xy$ の一般解を求めよ。

(解) $\dfrac{dy}{dx}=x+2xy\cdots$①

求める解を　$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots+a_nx^n+\cdots$　とおくと

$$\frac{dy}{dx}=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots$$

これらを①に代入すると

$$a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots$$
$$=x+2x(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots+a_nx^n+\cdots)$$

定数項は　$a_1=0$

x の係数は　$2a_2=1+2a_0$

x^2 の係数は　$3a_3=2a_1$

x^3 の係数は　$4a_4=2a_2$

$\cdots\cdots\cdots$　$\cdots\cdots\cdots$

x^n の係数は　$(n+1)a_{n+1}=2a_{n-1}$

$\therefore\quad a_{n+1}=\dfrac{2}{n+1}a_{n-1}\qquad\therefore\quad a_n=\dfrac{2}{n}a_{n-2}$

$a_0=\alpha$ とおくと　$a_1=0$,　$a_2=\dfrac{1+2\alpha}{2}$,　$a_3=\dfrac{2}{3}a_1=\dfrac{2}{3}\cdot 0=0$,　$a_4=\dfrac{2}{4}a_2=\dfrac{1+2\alpha}{2}\cdot\dfrac{1}{2}$,

$a_5=\dfrac{2}{5}a_3=0$,　$a_6=\dfrac{2}{6}a_4=\dfrac{2}{6}\cdot\dfrac{1+2\alpha}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1+2\alpha}{2}\cdot\dfrac{1}{6}$,　$a_7=\dfrac{2}{7}a_5=0$,

$a_8=\dfrac{2}{8}a_6=\dfrac{2}{8}\cdot\dfrac{1+2\alpha}{2}\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{1+2\alpha}{2}\cdot\dfrac{1}{24}$,　$\cdots$

$$\therefore y=\alpha+\frac{1+2\alpha}{2}\left(x^2+\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{24}x^8+\cdots\right)=\alpha+\frac{1+2\alpha}{2}\left(\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}+\cdots\right)$$
$$=\alpha-\frac{1+2\alpha}{2}+\frac{1+2\alpha}{2}\left(1+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}+\cdots\right)$$

ここで、$x^2=t$ とおくと

$1+\dfrac{x^2}{1!}+\dfrac{x^4}{2!}+\dfrac{x^6}{3!}+\dfrac{x^8}{4!}+\cdots=1+\dfrac{t}{1!}+\dfrac{t^2}{2!}+\dfrac{t^3}{3!}+\dfrac{t^4}{4!}+\cdots=e^t=e^{x^2}$　であるから

$\therefore\quad y=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1+2\alpha}{2}e^{x^2}$　　$\dfrac{1+2\alpha}{2}=C$　とおくと、求める一般解は

$\therefore\quad y=-\dfrac{1}{2}+Ce^{x^2}$　　(C は任意定数)　〃

≪参考≫　この結果を変数分離形で確認してみよう。

$\dfrac{dy}{dx}=x(1+2y)$,　$\displaystyle\int\frac{2}{1+2y}dy=2\int xdx$,　$\log(1+2y)=x^2+2c$,　$|1+2y|=e^{x^2+2c}$,

$1+2y=\pm e^{2c}e^{x^2}$,　$\pm\dfrac{e^{2c}}{2}=C$ とおくと　$\therefore y=-\dfrac{1}{2}+Ce^{x^2}$　(C は任意定数)　〃