# 級数を用いて微分方程式の一般解を求める

**例 15** 級数を用いて、微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{3}{x}\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{3}{x^2}y=0$ の一般解を求めよ。

(解) $x^2y''+3xy'-3y=0\cdots$①

微分方程式①の解を

$$y=a_0x^{\lambda}+a_1x^{\lambda+1}+a_2x^{\lambda+2}+a_3x^{\lambda+3}+a_4x^{\lambda+4}+\cdots+a_nx^{\lambda+n}+\cdots \qquad \text{とおくと}$$

$$y'=\lambda a_0x^{\lambda-1}+(\lambda+1)a_1x^{\lambda}+(\lambda+2)a_2x^{\lambda+1}+(\lambda+3)a_3x^{\lambda+2}+\cdots+(\lambda+n)a_nx^{\lambda+n-1}+\cdots$$

$$y''=\lambda(\lambda-1)a_0x^{\lambda-2}+(\lambda+1)\lambda a_1x^{\lambda-1}+(\lambda+2)(\lambda+1)a_2x^{\lambda}+(\lambda+3)(\lambda+2)a_3x^{\lambda+1}+\cdots$$
$$+(\lambda+n)(\lambda+n-1)a_nx^{\lambda+n-2}+\cdots$$

これらを①に代入すると

$$x^2\{\lambda(\lambda-1)a_0x^{\lambda-2}+(\lambda+1)\lambda a_1x^{\lambda-1}+(\lambda+2)(\lambda+1)a_2x^{\lambda}+(\lambda+3)(\lambda+2)a_3x^{\lambda+1}+\cdots$$
$$+(\lambda+n)(\lambda+n-1)a_nx^{\lambda+n-2}+\cdots\}$$
$$+3x\{\lambda a_0x^{\lambda-1}+(\lambda+1)a_1x^{\lambda}+(\lambda+2)a_2x^{\lambda+1}+(\lambda+3)a_3x^{\lambda+2}+\cdots+(\lambda+n)a_nx^{\lambda+n-1}+\cdots\}$$
$$-3\{a_0x^{\lambda}+a_1x^{\lambda+1}+a_2x^{\lambda+2}+a_3x^{\lambda+3}+a_4x^{\lambda+4}+\cdots+a_nx^{\lambda+n}+\cdots\}=0$$

$x^{\lambda}$ の係数は　$\lambda(\lambda-1)a_0+3\lambda a_0-3a_0=0$　$\therefore(\lambda-1)(\lambda+3)a_0=0$
$x^{\lambda+1}$ の係数は　$(\lambda+1)\lambda a_1+3(\lambda+1)a_1-3a_1=0$　$\therefore\lambda(\lambda+4)a_1=0$
$x^{\lambda+2}$ の係数は　$(\lambda+2)(\lambda+1)a_2+3(\lambda+2)a_2-3a_2=0$　$\therefore(\lambda+1)(\lambda+5)a_2=0$
$\cdots\cdots\cdots$　$\cdots\cdots\cdots$
$x^{\lambda+n}$ の係数は　$(\lambda+n)(\lambda+n-1)a_n+3(\lambda+n)a_n-3a_n=0$　$\therefore(\lambda+n-1)(\lambda+n+3)a_n=0$

i)　$n\neq-\lambda+1$ , $n\neq-\lambda-3$　のとき　$a_n=0$

ii)　$n=-\lambda+1$ のとき　$0\cdot a_{(-\lambda+1)}=0$　これは任意の実数 $a_{(-\lambda+1)}$ について成り立つ。
$\therefore y=a_{(-\lambda+1)}x^{\lambda+(-\lambda+1)}$　$a_{(-\lambda+1)}=C_1$ とおくと　$y=c_1x$

iii)　$n=-\lambda-3$ のとき　$0\cdot a_{(-\lambda-3)}=0$　これは任意の実数 $a_{(-\lambda-3)}$ について成り立つ。
$\therefore y=a_{(-\lambda-3)}x^{\lambda+(-\lambda-3)}$　$a_{(-\lambda-3)}=C_2$ とおくと　$y=c_2x^{-3}$

したがって、i) , ii) , iii) から　求める一般解は

$$\therefore\quad y=C_1x+\frac{C_2}{x^3}\quad(C_1,C_2\text{は任意定数})\quad〃$$

≪参考≫　①は同次形線形微分方程式であるから、$x=e^t$ とおくと　$t=\log x$　$\therefore\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)=\left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

これらを①に代入すると $x^2\left(-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)+3x\left(\dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dt}\right)-3y=0$ ,$\therefore\dfrac{d^2y}{dt^2}+2\dfrac{dy}{dt}-3y=0\cdots$②

この特性方程式は　$\lambda^2+2\lambda-3=0$　$\therefore\lambda=1$ , $\lambda=-3$

よって、②の一般解は　$y=C_1e^t+C_2e^{-3t}$　$\therefore y=C_1e^t+C_2(e^t)^{-3}=C_1x+\dfrac{C_2}{(e^t)^3}$

ゆえに求める一般解は　$y=C_1x+\dfrac{C_2}{x^3}$ $(C_1,C_2\text{は任意定数})$　〃