級数を用いて微分方程式の一般解を求める

例 16　級数を用いて、微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{1}{2x}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{4x}y=0$ の一般解を求めよ。

(解) $4x^2y''+2xy'+xy=0\cdots$①

①の解を　$y=a_0x^\lambda+a_1x^{\lambda+1}+a_2x^{\lambda+2}+a_3x^{\lambda+3}+a_4x^{\lambda+4}+\cdots+a_nx^{\lambda+n}+\cdots$　とおくと

$$y'=\lambda a_0x^{\lambda-1}+(\lambda+1)a_1x^\lambda+(\lambda+2)a_2x^{\lambda+1}+(\lambda+3)a_3x^{\lambda+2}+\cdots+(\lambda+n)a_nx^{\lambda+n-1}+\cdots$$

$$y''=\lambda(\lambda-1)a_0x^{\lambda-2}+(\lambda+1)\lambda a_1x^{\lambda-1}+(\lambda+2)(\lambda+1)a_2x^\lambda+(\lambda+3)(\lambda+2)a_3x^{\lambda+1}+\cdots$$
$$+(\lambda+n)(\lambda+n-1)a_nx^{\lambda+n-2}+\cdots$$

これらを①に代入すると

$$4x^2\{\lambda(\lambda-1)a_0x^{\lambda-2}+(\lambda+1)\lambda a_1x^{\lambda-1}+(\lambda+2)(\lambda+1)a_2x^\lambda+(\lambda+3)(\lambda+2)a_3x^{\lambda+1}+\cdots$$
$$+(\lambda+n)(\lambda+n-1)a_nx^{\lambda+n-2}+\cdots\}$$
$$+2x\{\lambda a_0x^{\lambda-1}+(\lambda+1)a_1x^\lambda+(\lambda+2)a_2x^{\lambda+1}+(\lambda+3)a_3x^{\lambda+2}+\cdots+(\lambda+n)a_nx^{\lambda+n-1}+\cdots\}$$
$$+x\{a_0x^\lambda+a_1x^{\lambda+1}+a_2x^{\lambda+2}+a_3x^{\lambda+3}+a_4x^{\lambda+4}+\cdots+a_nx^{\lambda+n}+\cdots\}=0$$

x^λ の係数は　$4\lambda(\lambda-1)a_0+2\lambda a_0=0$　　$\therefore 2\lambda(2\lambda-1)a_0=0\cdots$②

$x^{\lambda+1}$ の係数は　$4(\lambda+1)\lambda a_1+2(\lambda+1)a_1+a_0=0$　　$\therefore (\lambda+1)(2\lambda+1)a_1+\frac{1}{2}a_0=0$

$x^{\lambda+2}$ の係数は　$4(\lambda+2)(\lambda+1)a_2+2(\lambda+2)a_2+a_1=0$　　$\therefore (\lambda+2)(2\lambda+3)a_2+\frac{1}{2}a_1=0$

$\cdots\cdots\cdots$　　$\cdots\cdots\cdots$

$x^{\lambda+n}$ の係数は　$4(\lambda+n)(\lambda+n-1)a_n+2(\lambda+n)a_n+a_{(n-1)}=0$　$\therefore (\lambda+n)(2\lambda+2n-1)a_n+\frac{1}{2}a_{(n-1)}=0$

②から　$a_0\neq 0$ のとき　$2\lambda(2\lambda-1)=0$　$\therefore \lambda=0,\ \lambda=\dfrac{1}{2}$

(1)　$\lambda=0$　のとき

$1\cdot 1a_1+\frac{1}{2}a_0=0$

$\therefore a_1=-\dfrac{a_0}{2\cdot 1}=(-1)\dfrac{c_0}{2!}$

$2\cdot 3a_2+\frac{1}{2}a_1=0$

$\therefore a_2=-\dfrac{a_1}{4\cdot 3}=(-1)^2\dfrac{c_0}{4!}$

$\cdots\cdots\cdots$　　$\cdots\cdots\cdots$

$n(2n-1)a_n+\frac{1}{2}a_{(n-1)}=0$

$\therefore a_n=-\dfrac{a_{(n-1)}}{2n(2n-1)}=(-1)^n\dfrac{c_0}{(2n)!}$

$$y=a_0\left\{x^0-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{(2n)!}+\cdots\right\}$$
$$=a_0\left\{1-\frac{(\sqrt{x})^2}{2!}+\frac{(\sqrt{x})^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!}+\cdots\right\}$$

$=a_0\cos\sqrt{x}$　　$a_0=C_1$ とおくと

$y=C_1\cos\sqrt{x}$ (C_1 は任意定数)

(2)　$\lambda=\frac{1}{2}$　のとき

$\frac{3}{2}\cdot 2a_1+\frac{1}{2}a_0=0$

$\therefore a_1=-\dfrac{a_0}{3\cdot 2}=(-1)\dfrac{c_0}{3!}$

$\frac{5}{2}\cdot 4a_2+\frac{1}{2}a_1=0$

$\therefore a_2=-\dfrac{a_1}{5\cdot 4}=(-1)^2\dfrac{c_0}{5!}$

$\cdots\cdots\cdots$　　$\cdots\cdots\cdots$

$\frac{2n+1}{2}(2n)a_n+\frac{1}{2}a_{(n-1)}=0$

$\therefore a_n=-\dfrac{a_{(n-1)}}{(2n+1)(2n)}=(-1)^n\dfrac{c_0}{(2n+1)!}$

$$y=a_0x^{\frac{1}{2}}\left\{1-\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{(2n+1)!}+\cdots\right\}$$
$$=a_0\left\{\sqrt{x}-\frac{(\sqrt{x})^3}{3!}+\frac{(\sqrt{x})^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\right\}$$

$=a_0\sin\sqrt{x}$　　$a_0=C_2$ とおくと

$y=C_2\sin\sqrt{x}$ (C_2 は任意定数)

よって、(1), (2) から、求める一般解は　$y=C_1\cos\sqrt{x}+C_2\sin\sqrt{x}$　(C_1, C_2は任意定数)　〃