級数を用いて微分方程式の特殊解を求める

例 17　級数を用いて、微分方程式 $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}-2x\dfrac{dy}{dx}+20y=0$ の解で、
初期条件「$x=0$ のとき　$y=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{dy}{dx}=0$」を満たすものを求めよ。

(解)　$(1-x^2)y''-2xy'+20y=0$ $\cdots$①

求める解を　$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\cdots+a_nx^n+\cdots$　とおくと

$y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+5a_5x^4+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots$

$y''=2a_2+3\cdot 2a_3x+4\cdot 3a_4x^2+5\cdot 4a_5x^3+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots$

これらを①に代入すると

$$(1-x^2)\{2a_2+3\cdot 2a_3x+4\cdot 3a_4x^2+5\cdot 4a_5x^3+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots\}$$

$$-2x(a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+5a_5x^4+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots)$$

$$+20(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\cdots+a_nx^n+\cdots)=0$$

定数項は　$2a_2+20a_0=0$
x の係数は　$3\cdot 2a_3-2a_1+20a_1=0$
x^2 の係数は　$4\cdot 3a_4-2a_2-2\cdot 2a_2+20a_2=0$
x^3 の係数は　$5\cdot 4a_5-3\cdot 2a_3-2\cdot 3a_3+20a_3=0$
$\cdots\cdots\cdots$　$\cdots\cdots\cdots$
x^n の係数は　$(n+2)(n+1)a_{n+2}-n(n-1)a_n-2na_n+20a_n=0$

$\therefore (n+2)(n+1)a_{n+2}=(n^2+n-20)a_n$　　$\therefore (n+2)(n+1)a_{n+2}=(n-4)(n+5)a_n$

$$\therefore\quad a_{n+2}=\frac{(n-4)(n+5)}{(n+2)(n+1)}a_n$$

ここで、初期条件「$x=0$ のとき $y=\dfrac{1}{2}$，$y'=0$」より $a_0=\dfrac{1}{2}$，$a_1=0$ であるから

$$a_2=\frac{(-4)\cdot 5}{2\cdot 1}a_0=\frac{(-4)\cdot 5}{2\cdot 1}\cdot\frac{1}{2}=-5$$

$$a_3=\frac{(-3)\cdot 6}{3\cdot 2}a_1=\frac{(-3)\cdot 6}{3\cdot 2}\cdot 0=0$$

$$a_4=\frac{(-2)\cdot 7}{4\cdot 3}a_2=\frac{(-2)\cdot 7}{4\cdot 3}\cdot(-5)=\frac{35}{6}$$

$$a_5=\frac{(-1)\cdot 8}{5\cdot 4}a_3=\frac{(-1)\cdot 8}{5\cdot 3}\cdot 0=0$$

$$a_6=\frac{0\cdot 9}{6\cdot 5}a_4=0\cdot\frac{35}{6}=0\quad,\quad a_7=a_8=a_9=\cdots=a_n=\cdots=0$$

よって、求める特殊解は　$y=\dfrac{1}{2}-5x^2+\dfrac{35}{6}x^4$　〃