級数を用いて微分方程式の特殊解を求める

$\boxed{\text{例 18}}$ 級数を用いて、微分方程式 $(2-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}+15y=0$ の解で、
初期条件「$x=0$ のとき　$y=0$, $\dfrac{dy}{dx}=-3$ 」を満たすものを求めよ。

(解) $(2-x^2)y''+xy'+15y=0$ $\cdots$①

求める解を　$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\cdots+a_nx^n+\cdots$　とおくと

$y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+5a_5x^4+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots$

$y''=2a_2+3\cdot2a_3x+4\cdot3a_4x^2+5\cdot4a_5x^3+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots$

これらを①に代入すると

$$(2-x^2)\{2a_2+3\cdot2a_3x+4\cdot3a_4x^2+5\cdot4a_5x^3+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots\}$$
$$+x(a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+5a_5x^4+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots)$$
$$+15(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\cdots+a_nx^n+\cdots)=0$$

定数項は　$2\cdot2a_2+15a_0=0$
x の係数は　$2\cdot3\cdot2a_3+a_1+15a_1=0$
x^2 の係数は　$2\cdot4\cdot3a_4-2a_2+2a_2+15a_2=0$
x^3 の係数は　$2\cdot5\cdot4a_5-3\cdot2a_3+3a_3+15a_3=0$
$\cdots\cdots\cdots$　$\cdots\cdots\cdots$
x^n の係数は　$2(n+2)(n+1)a_{n+2}-n(n-1)a_n+na_n+15a_n=0$

$\therefore 2(n+2)(n+1)a_{n+2}=(n^2-2n-15)a_n$　　$\therefore 2(n+2)(n+1)a_{n+2}=(n+3)(n-5)a_n$

$$\therefore\quad a_{n+2}=\frac{(n+3)(n-5)}{2(n+2)(n+1)}a_n$$

ここで、初期条件「$x=0$ のとき $y=0$, $y'=-3$」より $a_0=0$, $a_1=-3$ であるから

$$a_2=\frac{3\cdot(-5)}{2\cdot2\cdot1}a_0=-\frac{15}{4}\cdot0=0$$

$$a_3=\frac{4\cdot(-4)}{2\cdot3\cdot2}a_1=-\frac{4}{3}\cdot(-3)=4$$

$$a_4=\frac{5\cdot(-3)}{2\cdot4\cdot3}a_2=-\frac{5}{8}\cdot0=0$$

$$a_5=\frac{6\cdot(-2)}{2\cdot5\cdot4}a_3=-\frac{3}{10}\cdot4=-\frac{6}{5}$$

$$a_6=\frac{7\cdot(-1)}{2\cdot6\cdot5}a_4=-\frac{7}{60}\cdot0=0$$

$$a_7=\frac{8\cdot0}{2\cdot7\cdot6}a_5=0\quad,\qquad a_8=a_9=\cdots=a_n=\cdots=0$$

よって、求める特殊解は　$y=-3x+4x^3-\dfrac{6}{5}x^5$　〃