斉次微分方程式の２つの特殊解を知り得た場合

斉次微分方程式 $L(y)=0$ の２つの特殊解を $u_1(x)$, $u_2(x)$ を知り得た場合

ロンスキャン　$w(u_1,u_2)=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix}=u_1u_2'-u_1'u_2\neq 0$　のとき、$u_1(x),u_2(x)$ は独立であり、

非斉次微分方程式 $L(y)=R(x)$ の一般解は $y=C_1u_1+C_2u_2+u_1\displaystyle\int\frac{-Ru_2}{w(u_1,u_2)}dx+u_2\int\frac{Ru_1}{w(u_1,u_2)}dx$

例 21　微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{x}{x-1}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{x-1}y=x-1$ の一般解を求めよ。

(解)

(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{x}{x-1}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{x-1}y=x-1\ \cdots①$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{x}{x-1}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{x-1}y=0\ \cdots②$

②は $y=x$, $y=e^x$ という２つの特殊解をもつ。
よって、ロンスキャンを求めると

$$w(x,e^x)=\begin{vmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix}=xe^x-e^x=e^x(x-1)\neq 0$$

よって、①の一般解は

$$y=ax+be^x+x\int\frac{-(x-1)e^x}{e^x(x-1)}dx+e^x\int\frac{(x-1)x}{e^x(x-1)}dx$$

$$y=ax+be^x-x\int dx+e^x\int xe^{-x}dx$$

ここで $\displaystyle\int 1dx=x$, $\displaystyle\int e^{-x}dx=-e^{-x}$ より

$$y=ax+be^x-x\cdot x+e^x\left\{x(-e^{-x})-\int 1\cdot(-e^{-x})dx\right\}$$

$$y=ax+be^x-x^2+e^x\left\{x\cdot(-e^{-x})+\int e^{-x}dx\right\}$$

$$y=ax+be^x-x^2+e^x\{-xe^{-x}+(-e^{-x})\}$$

$$y=ax+be^x-x^2-x-1$$

$a-1=C_1$, $b=C_2$　とおくと

$\therefore y=C_1x+C_2e^x-x^2-1$ (C_1,C_2は任意定数) 〃

これが求める一般解である。

≪確認≫

$y=x$　のとき　$\frac{dy}{dx}=1$, $\frac{d^2y}{dx^2}=0$

$y=e^x$　のとき　$\frac{dy}{dx}=e^x$, $\frac{d^2y}{dx^2}=e^x$

であるから、いずれの場合も②を満たす。

(別解) $y''-\dfrac{x}{x-1}y'+\dfrac{1}{x-1}y=x-1\cdots①$

$y''-\dfrac{x}{x-1}y'+\dfrac{1}{x-1}y=0\cdots②$

②は　$y=x$, $y=e^x$　という
２つの独立な特殊解をもつ。
よって、②の一般解は

$$y=C_1x+C_2e^x\ (C_1,C_2\text{は任意定数})\ \cdots③$$

これと①の右辺から、①の特殊解の１つは
$y=ax^2+b$　と予想される。

$\therefore$　$y'=2ax$　,　$y''=2a$

これらを①に代入して

$$2a-\frac{x}{x-1}\cdot 2ax+\frac{1}{x-1}(ax^2+b)=x-1$$

$2a(x-1)-2ax^2+ax^2+b=(x-1)^2$

$-ax^2+2ax-2a+b=x^2-2x+1$

$$\begin{cases} -a=1 \\ 2a=-2 \\ -2a+b=1 \end{cases}$$

これを解いて、$a=-1$, $b=-1$

よって、①の解の１つは

$y=-x^2-1\quad\cdots④$

ゆえに、③,④から求める一般解は

$$y=C_1x+C_2e^x-x^2-1\quad〃$$

(C_1,C_2 は任意定数)