斉次微分方程式の２つの特殊解を知り得た場合

斉次微分方程式 $L(y)=0$ の２つの特殊解を $u_1(x)$, $u_2(x)$ を知り得た場合

ロンスキャン　$w(u_1,u_2)=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix}=u_1u_2'-u_1'u_2\neq 0$　のとき、$u_1(x),u_2(x)$ は独立であり、

非斉次微分方程式 $L(y)=R(x)$ の一般解は $y=C_1u_1+C_2u_2+u_1\displaystyle\int\frac{-Ru_2}{w(u_1,u_2)}dx+u_2\int\frac{Ru_1}{w(u_1,u_2)}dx$

$\boxed{\text{例 22}}$　微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}-9\dfrac{dy}{dx}+20y=x^2e^{3x}$ の一般解を求めよ。

(解)

(1) $y''-9y'+20y=x^2e^{3x}\ \cdots$①

この斉次方程式は　$y''-9y'+20y=0\ \cdots$②

であり、その特性方程式は

$\lambda^2-9\lambda+20=0\quad\therefore\lambda=4\ ,\ \lambda=5$

②は独立な２つの特殊解 $y=e^{4x}$, $y=e^{5x}$

をもつ。よって、ロンスキャンを求めると

$$w(e^{4x},e^{5x})=\begin{vmatrix} e^{4x} & e^{5x} \\ 4e^{4x} & 5e^{5x} \end{vmatrix}=5e^{9x}-4e^{9x}=e^{9x}$$

よって、①の一般解は

$$y=C_1e^{4x}+C_2e^{5x}+e^{4x}\int\frac{-x^2e^{3x}e^{5x}}{e^{9x}}dx+e^{5x}\int\frac{x^2e^{3x}e^{4x}}{e^{9x}}dx$$

$$y=C_1e^{4x}+C_2e^{5x}-e^{4x}\int x^2e^{-x}dx+e^{5x}\int x^2e^{-2x}dx$$

ここで

$$\int x^2e^{-x}dx=x^2(-e^{-x})-\int(2x)(-e^{-x})dx$$

$$=-x^2e^{-x}+2\int xe^{-x}dx$$

$$=-x^2e^{-x}+2\left\{x(-e^{-x})-\int 1(-e^{-x})dx\right\}$$

$$=-x^2e^{-x}+2\left\{-xe^{-x}+\int e^{-x}dx\right\}$$

$$=-x^2e^{-x}+2(-xe^{-x}-e^{-x})=(-x^2-2x-2)e^{-x}$$

$$\int x^2e^{-2x}dx=x^2(-\frac{1}{2}e^{-2x})-\int(2x)(-\frac{1}{2}e^{-2x})dx$$

$$=-\frac{1}{2}x^2e^{-2x}+\int xe^{-2x}dx$$

$$=-\frac{1}{2}x^2e^{-2x}+\left\{x(-\frac{1}{2}e^{-2x})-\int 1(-\frac{1}{2}e^{-2x})dx\right\}$$

$$=-\frac{1}{2}x^2e^{-2x}-\frac{1}{2}\left\{xe^{-2x}-\int e^{-2x}dx\right\}$$

$$=-\tfrac{1}{2}x^2e^{-2x}-\tfrac{1}{2}xe^{-2x}+\tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{2}e^{-2x})$$

$=(-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4})e^{-2x}$　であるから

$$y=C_1e^{4x}+C_2e^{5x}-e^{4x}(-x^2-2x-2)e^{-x}+e^{5x}\left(-\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{4}\right)e^{-2x}$$

$$\therefore y=C_1e^{4x}+C_2e^{5x}+\frac{1}{4}e^{3x}(2x^2+6x+7)\quad〃$$

(C_1,C_2 は任意定数)

(別解) $y''-9y'+20y=x^2e^{3x}\cdots$①

斉次微分方程式 $y''-9y'+20y=0\cdots$②

の特性方程式は $\lambda^2-9\lambda+20=0\ \therefore\lambda=4,5$

よって、②の一般解は

$y=C_1e^{4x}+C_2e^{5x}$ (C_1,C_2は任意定数) $\cdots$③

これと①の右辺から、①の特殊解の１つを

$y=(ax^2+bx+c)e^{3x}$　と予想すると

$y'=\{3ax^2+(2a+3b)x+(b+3c)\}e^{3x}$

$y''=\{9ax^2+(12a+9b)x+(2a+6b+9c)\}e^{3x}$

これらを①に代入して整理すると

$\{2ax^2+(-6a+2b)x+(2a-3b+2c)\}e^{3x}=x^2e^{3x}$

$\begin{cases} 2a=1 \\ -6a+2b=0 \\ 2a-3b+2c=0 \end{cases}$　これを解いて　$a=\dfrac{1}{2}$,　$b=\dfrac{3}{2}$,　$c=\dfrac{7}{4}$

よって、①の解の１つは

$y=\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{7}{4}\right)e^{3x}\quad\cdots$④

ゆえに、③,④から求める一般解は

$$y=C_1e^{4x}+C_2e^{5x}+\frac{1}{4}e^{3x}(2x^2+6x+7)\quad〃$$

(C_1,C_2 は任意定数)