斉次微分方程式の２つの特殊解を知り得た場合

斉次微分方程式 $L(y)=0$ の２つの特殊解を $u_1(x)$，$u_2(x)$ を知り得た場合

ロンスキャン　$w(u_1,u_2)=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix}=u_1u_2'-u_1'u_2\neq 0$　のとき、$u_1(x),u_2(x)$ は独立であり、

非斉次微分方程式 $L(y)=R(x)$ の一般解は $y=C_1u_1+C_2u_2+u_1\displaystyle\int\frac{-Ru_2}{w(u_1,u_2)}dx+u_2\int\frac{Ru_1}{w(u_1,u_2)}dx$

例 23　微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+4y=x^2$ の一般解を求めよ。

(解)

(1) $y''+4y=x^2$ $\cdots$①

この斉次方程式は　$y''+4y=0$ $\cdots$② であり、

その特性方程式は　$\lambda^2+4=0$　$\therefore\lambda=\pm 2i$

②は独立な２つの特殊解 $y=\cos 2x$，$y=\sin 2x$

をもつ。よって、ロンスキャンを求めると

$w(\cos 2x,\sin 2x)=\begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix}$

$=2(\cos^2 2x+\sin^2 2x)=2\neq 0$

よって、①の一般解は

$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$

$\quad+\cos 2x\displaystyle\int\frac{-x^2\sin 2x}{2}dx+\sin 2x\int\frac{x^2\cos 2x}{2}dx$

$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$

$\quad-\dfrac{1}{2}\cos 2x\displaystyle\int x^2\sin 2xdx+\frac{1}{2}\sin 2x\int x^2\cos 2xdx$

ここで

$\displaystyle\int x^2\sin 2xdx$

$\quad=x^2(-\dfrac{1}{2}\cos 2x)-\displaystyle\int 2x(-\frac{1}{2}\cos 2x)dx$

$\quad=-\dfrac{1}{2}x^2\cos 2x+\displaystyle\int x\cos 2xdx$

$\quad=-\dfrac{1}{2}x^2\cos 2x+\left\{x(\dfrac{1}{2}\sin 2x)-\displaystyle\int 1\cdot\frac{1}{2}\sin 2xdx\right\}$

$\quad=-\dfrac{1}{2}x^2\cos 2x+\dfrac{1}{2}x\sin 2x-\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\cos 2x\right)$

$\quad=-\dfrac{1}{2}x^2\cos 2x+\dfrac{1}{2}x\sin 2x+\dfrac{1}{4}\cos 2x$

$\displaystyle\int x^2\cos 2xdx=x^2(\frac{1}{2}\sin 2x)-\int 2x(\frac{1}{2}\sin 2x)dx$

$\quad=\dfrac{1}{2}x^2\sin 2x-\displaystyle\int x\sin 2xdx$

$\quad=\dfrac{1}{2}x^2\sin 2x-\left\{x(-\dfrac{1}{2}\cos 2x)-\displaystyle\int 1(-\frac{1}{2}\cos 2x)dx\right\}$

$\quad=-\dfrac{1}{2}x^2\sin 2x+\dfrac{1}{2}x\cos 2x-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\cos 2xdx$

$\quad=\frac{1}{2}x^2\sin 2x+\frac{1}{2}x\cos 2x-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\sin 2x)$

$\quad=\frac{1}{2}x^2\sin 2x+\frac{1}{2}x\cos 2x-\frac{1}{4}\sin 2x$　であるから

$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$

$\quad-\frac{1}{2}\cos 2x\left\{-\frac{1}{2}x^2\cos 2x+\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x\right\}$

$\quad+\frac{1}{2}\sin 2x\left\{\frac{1}{2}x^2\sin 2x+\frac{1}{2}x\cos 2x-\frac{1}{4}\sin 2x\right\}$

$\therefore y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{8}$　〃

$(C_1,C_2$ は任意定数)

(別解) $y''+4y=x^2\cdots$①

斉次微分方程式 $y''+4y=0\cdots$②

の特性方程式は $\lambda^2+4=0\ \therefore\lambda=\pm 2i$

よって、②の一般解は

$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$ (C_1,C_2は任意定数) $\cdots$③

これと①の右辺から、①の特殊解の１つを

$y=px^2+qx+r$ と予想すると

$y'=2px+q$，$y''=2p$

これらを①に代入して整理すると

$4px^2+4qx+2(p+2r)=x^2$

$\begin{cases} 4p=1 \\ 4q=0 \\ p+2r=0 \end{cases}$　これを解いて $\begin{cases} p=\frac{1}{4} \\ q=0 \\ r=-\frac{1}{8} \end{cases}$

よって、①の解の１つは

$y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{8}$　$\cdots$④

ゆえに、③,④から求める一般解は

$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{8}$　〃

$(C_1,C_2$ は任意定数)