2 階線形微分方程式の $\dfrac{dy}{dx}$ の項を消去する方法

例 24　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1)　$\dfrac{d^2y}{dx^2}+2x\dfrac{dy}{dx}+x^2y=0$　　(2)　$\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{2}{x}\dfrac{dy}{dx}+\left(\dfrac{2}{x^2}+9\right)y=0$

(解)

(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+2x\dfrac{dy}{dx}+x^2y=0\ \cdots①$

u, v を x の関数として $y=uv$ とおくと

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}\cdot v+u\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2u}{dx^2}\cdot v+\frac{du}{dx}\cdot\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dx}\cdot\frac{dv}{dx}+u\cdot\frac{d^2v}{dx^2}$$

$$\therefore\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2u}{dx^2}\cdot v+2\frac{du}{dx}\cdot\frac{dv}{dx}+u\cdot\frac{d^2v}{dx^2}$$

これらを①に代入して

$$\frac{d^2u}{dx^2}v+2\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}+u\frac{d^2v}{dx^2}+2x\left(\frac{du}{dx}v+u\frac{dv}{dx}\right)+x^2uv=0$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}v+2\left(\frac{dv}{dx}+xv\right)\frac{du}{dx}+u\left(\frac{d^2v}{dx^2}+2x\frac{dv}{dx}+x^2v\right)=0\cdots②$$

$\dfrac{dv}{dx}+xv=0$　とおくと　$\displaystyle\int\frac{1}{v}dv=-\int xdx$

$\log v=-\dfrac{1}{2}x^2$　$\therefore v=e^{-\frac{1}{2}x^2}\cdots③$

$$\frac{dv}{dx}=-xe^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$\frac{d^2v}{dx^2}=-e^{-\frac{1}{2}x^2}+x^2e^{-\frac{1}{2}x^2}=(x^2-1)e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

これらを②に代入して整理すると

$$\frac{d^2u}{dx^2}e^{-\frac{1}{2}x^2}+u\left\{(x^2-1)+2x(-x)+x^2\right\}e^{-\frac{1}{2}x^2}=0$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}-u=0\cdots④$$

この特性方程式は　$\lambda^2-1=0$　$\therefore\lambda=\pm1$

よって、④の一般解は

$u=C_1e^x+C_2e^{-x}$ (C_1, C_2 は任意定数)$\cdots⑤$

③と⑤を $y=uv$ に代入すると

求める一般解は

$$y=(C_1e^x+C_2e^{-x})e^{-\frac{1}{2}x^2}\ (C_1, C_2\text{は任意定数})\ /\!/$$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{2}{x}\dfrac{dy}{dx}+\left(\dfrac{2}{x^2}+9\right)y=0\ \cdots①$

u, v を x の関数として $y=uv$ とおくと

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}\cdot v+u\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2u}{dx^2}\cdot v+\frac{du}{dx}\cdot\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dx}\cdot\frac{dv}{dx}+u\cdot\frac{d^2v}{dx^2}$$

$$\therefore\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2u}{dx^2}\cdot v+2\frac{du}{dx}\cdot\frac{dv}{dx}+u\cdot\frac{d^2v}{dx^2}$$

これらを①に代入して

$$\frac{d^2u}{dx^2}v+2\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}+u\frac{d^2v}{dx^2}$$
$$-\frac{2}{x}\left(\frac{du}{dx}v+u\frac{dv}{dx}\right)+\left(\frac{2}{x^2}+9\right)uv=0$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}v+2\left(\frac{dv}{dx}-\frac{1}{x}v\right)\frac{du}{dx}$$
$$+u\left\{\frac{d^2v}{dx^2}-\frac{2}{x}\frac{dv}{dx}+\left(\frac{2}{x^2}+9\right)v\right\}=0\cdots②$$

$\dfrac{dv}{dx}-\dfrac{1}{x}v=0$ とおくと $\displaystyle\int\frac{1}{v}dv=\int\frac{1}{x}dx$

$\log|v|=\log|x|$　$\therefore v=x\cdots$　③

$\dfrac{dv}{dx}=1$　,　$\dfrac{d^2v}{dx^2}=0$

これらを②に代入して整理すると

$$x\frac{d^2u}{dx^2}+u\left\{0-\frac{2}{x}\cdot1+\left(\frac{2}{x^2}+9\right)x\right\}=0$$

$$x\frac{d^2u}{dx^2}+9xu=0\cdots④$$

$x\neq0$　のとき　$\dfrac{d^2u}{dx^2}+9u=0\cdots④$

④の特性方程式は　$\lambda^2+9=0$　$\therefore\lambda=\pm3i$

よって、④の一般解は

$u=C_1\cos3x+C_2\sin3x$ (C_1, C_2 は任意定数)$\cdots⑤$

③と⑤を $y=uv$ に代入すると

求める一般解は

$$y=x(C_1\cos3x+C_2\sin3x)\ (C_1, C_2\text{は任意定数})\ /\!/$$