2 階線形微分方程式の独立変数を変換する方法

例 27　微分方程式 $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}-9y=0$　の一般解を求めよ。

≪参考≫

$\dfrac{d^2y}{dx^2}+P(x)\dfrac{dy}{dx}+Q(x)=R(x)$ において

$\dfrac{d^2t}{dx^2}+P(x)\dfrac{dt}{dx}=0$ になるように変換すると

$\dfrac{dt}{dx}=e^{-\int P(x)dx}$　$\therefore t=\displaystyle\int e^{-\int P(x)dx}dx$

(解)

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}-9y=0\cdots①$$

$(1-x^2)\dfrac{d^2t}{dx^2}-x\dfrac{dt}{dx}=0$ とおくと

$$\frac{d^2t}{dx^2}-\frac{x}{1-x^2}\frac{dt}{dx}=0$$

$$\frac{dt}{dx}=e^{-\int(-\frac{x}{1-x^2})dx}=e^{\int\frac{x}{1-x^2}dx}$$

$$=e^{-\frac{1}{2}\int\frac{-2x}{1-x^2}dx}=e^{-\frac{1}{2}\log(1-x^2)}$$

$$=e^{\log\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ \cdots②$$

$$\therefore t=\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$x=\sin\theta$　とおくと

$$\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta\qquad\therefore dx=\cos\theta d\theta$$

$$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{\cos^2\theta}=\cos\theta$$

$$\therefore t=\int\frac{1}{\cos\theta}\cdot\cos\theta d\theta$$

$$=\int d\theta=\theta=\mathrm{Sin}^{-1}x$$

よって、$t=\mathrm{Sin}^{-1}x$　と変換すると

②から

$$\frac{d^2t}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{d}{dx}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2x)$$

$$=\frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$　であるから

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\frac{dy}{dt}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

$$=\frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{1-x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

これらを①に代入して

$$(1-x^2)\left(\frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{1-x^2}\frac{d^2y}{dt^2}\right)$$
$$-x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{dy}{dt}-9y=0$$

$$\therefore\frac{d^2y}{dt^2}-9y=0\cdots③$$

この特性方程式は　$\lambda^2-9=0$　$\therefore\lambda=\pm3$
よって、③の一般解は

$y=C_1e^{3t}+C_2e^{-3t}$ (C_1,C_2は任意定数)

これに $t=\mathrm{Sin}^{-1}x$ を代入すると

求める一般解は

$$y=C_1e^{3\mathrm{Sin}^{-1}x}+C_2e^{-3\mathrm{Sin}^{-1}x}$$ 〃
(C_1,C_2 は任意定数)