$\dfrac{d^2y}{dx^2}=f(x)$ の形の微分方程式

$\boxed{\text{例 28}}$ 次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=x^2e^x$　　(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\log x$

≪部分積分≫

u , v を x の関数とするとき

$(uv)'=u'\cdot v+u\cdot v'$ であるから

$$\int u'vdx=u\cdot v-\int u\cdot v'dx$$

$$\int u\cdot v'dx=u\cdot v-\int u'vdx$$

(解) (1) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=x^2e^x$

$\dfrac{dy}{dx}=p$ とおくと $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dp}{dx}$

$\therefore \dfrac{dp}{dx}=x^2e^x$　　$\therefore p=\displaystyle\int x^2e^xdx$

$u=x^2$, $v'=e^x$ とおくと

$u'=2x$, $v=e^x$ であるから

$$p=x^2\cdot e^x-\int 2x\cdot e^xdx=x^2e^x-2\int xe^xdx$$

$$p=x^2e^x-2\left(x\cdot e^x-\int 1\cdot e^xdx\right)$$

$$=x^2e^x-2(xe^x-e^x)+C_1$$

$$\frac{dy}{dx}=(x^2-2x+2)e^x+C_1$$

$$y=\int\{(x^2-2x+2)e^x+C_1\}dx$$

ここで

$$\int(x^2-2x+2)e^xdx$$

$$=(x^2-2x+2)e^x-\int(2x-2)e^xdx$$

$$=(x^2-2x+2)e^x-\left\{(2x-2)e^x-\int 2e^xdx\right\}$$

$$=(x^2-2x+2)e^x-(2x-2)e^x+2e^x$$

$=(x^2-4x+6)e^x$ であるから

よって、求める一般解は

$y=(x^2-4x+6)e^x+C_1x+C_2$ 〃

(C_1,C_2 は任意定数)

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\log x$

$\dfrac{dy}{dx}=p$ とおくと $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dp}{dx}$

$\therefore \dfrac{dp}{dx}=\log x$　　$\therefore p=\displaystyle\int\log xdx$

$u'=1$, $v=\log x$ とおくと

$u=x$, $v'=\frac{1}{x}$ であるから

$$p=x\log x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=x\log x-\int dx=x\log x-x+C_1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=x\log x-x+C_1$$

$$y=\int(x\log x-x+C_1)dx$$

ここで

$$\int x\log xdx=\frac{x^2}{2}\log x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{2}\int xdx$$

$=\dfrac{1}{2}x^2\log x-\dfrac{1}{4}x^2$ であるから

$$y=\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x^2+C_1x+C_2$$

よって、求める一般解は

$y=\dfrac{1}{2}x^2\log x-\dfrac{3}{4}x^2+C_1x+C_2$ 〃

(C_1,C_2 は任意定数)