$\dfrac{d^2y}{dx^2}=f(y)$ の形の微分方程式

例 29　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1)　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1}{y^3}$　　(2)　$\sqrt{y}\,\dfrac{d^2y}{dx^2}=1$

(解) (1)　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1}{y^3}$

$\dfrac{dy}{dx}=p$　とおくと

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dp}{dx}=\dfrac{dp}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=p\dfrac{dp}{dy}$

$\therefore p\dfrac{dp}{dy}=\dfrac{1}{y^3}$　　$\therefore \displaystyle\int pdp=\int\frac{1}{y^3}dy$

$\dfrac{p^2}{2}=-\dfrac{1}{2y^2}+c$　　$\therefore p^2=-\dfrac{1}{y^2}+2c$

$p=\pm\sqrt{-\dfrac{1}{y^2}+2c}$　　$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\pm\sqrt{\dfrac{2cy^2-1}{y^2}}$

$\therefore \dfrac{dx}{dy}=\pm\sqrt{\dfrac{y^2}{2cy^2-1}}$

$x=\pm\displaystyle\int\frac{y}{\sqrt{2cy^2-1}}dy$

$=\pm\dfrac{1}{2c}\displaystyle\int\frac{4cy}{2\sqrt{2cy^2-1}}dy$

$=\pm\dfrac{1}{2c}\sqrt{2cy^2-1}+C_2$

$x-C_2=\pm\dfrac{1}{2c}\sqrt{2cy^2-1}$

$(x-C_2)^2=\dfrac{1}{4c^2}(2cy^2-1)$

$(x-C_2)^2=\dfrac{1}{2c}y^2-\dfrac{1}{4c^2}$

$y^2=2c(x-C_2)^2+\dfrac{1}{2c}$

$2c=C_1$　とおくと、求める一般解は

$y^2=C_1(x-C_2)^2+\dfrac{1}{C_1}$ (C_1, C_2は任意定数) 〃

(2)　$\sqrt{y}\,\dfrac{d^2y}{dx^2}=1$

$\dfrac{dy}{dx}=p$　とおくと

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dp}{dx}=\dfrac{dp}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=p\dfrac{dp}{dy}$

$\therefore \sqrt{y}\,p\dfrac{dp}{dy}=1$　　$\therefore \displaystyle\int pdp=\int\frac{1}{\sqrt{y}}dy$

$\dfrac{p^2}{2}=2\sqrt{y}+c$　　$\therefore p^2=4\sqrt{y}+2c$

ここで $c=2C_1$ とおくと

$p=\pm2\sqrt{\sqrt{y}+C_1}$　　$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\pm2\sqrt{\sqrt{y}+C_1}$

$\therefore \dfrac{dx}{dy}=\pm\dfrac{1}{2\sqrt{\sqrt{y}+C_1}}$

$x=\pm\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{\sqrt{y}+C_1}}dy$

$\sqrt{y}=t$　とおくと　$y=t^2$　$\therefore \dfrac{dy}{dt}=2t$

$x=\pm\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{t+C_1}}2tdt=\pm\int\frac{t}{\sqrt{t+C_1}}dt$

$=t\cdot2\sqrt{t+c_1}-\displaystyle\int1\cdot2\sqrt{t+C_1}\,dt$

$=2t\sqrt{t+C_1}-2\cdot\dfrac{(t+C_1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C_2$

$=2t\sqrt{t+C_1}-\dfrac{4}{3}(t+C_1)\sqrt{t+C_1}+C_2$

$=\dfrac{2}{3}\sqrt{t+C_1}\,(t-2C_1)+C_2$

$x=\dfrac{2}{3}\sqrt{\sqrt{y}+C_1}\,(\sqrt{y}-2C_1)+C_2$

$\therefore 3(x-C_2)=2\sqrt{\sqrt{y}+C_1}\,(\sqrt{y}-2C_1)$

よって、求める一般解は

$4(\sqrt{y}+C_1)(\sqrt{y}-2C_1)^2=9(x-C_2)^2$　〃

(C_1, C_2 は任意定数)