$y''=f(x,y')$ の形の微分方程式

例 31　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1)　$x\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}=4x$　　　(2)　$(x+1)\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}=(x+1)^4$

(解)

(1)　$x\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}=4x$

$\dfrac{dy}{dx}=p$　とおくと　$x\dfrac{dp}{dx}+p=4x$

$x\neq 0$　のとき　$\dfrac{dp}{dx}+\dfrac{p}{x}=4$

これは同次形微分方程式であるから

$\dfrac{p}{x}=u$　とおくと　$p=xu$

$\dfrac{dp}{dx}=1\cdot u+x\cdot\dfrac{du}{dx}$　であるから

$\left(u+x\dfrac{du}{dx}\right)+u=4$　　$\therefore x\dfrac{du}{dx}+2u=4$

$x\dfrac{du}{dx}=-2(u-2)$　　$\therefore \displaystyle\int\frac{1}{u-2}du=-2\int\frac{1}{x}dx$

$\log|u-2|=-2\log|x|+c$

$\log|x^2(u-2)|=c$　　$\therefore x^2(u-2)=\pm e^c$

$\pm e^c=C_1$　とおくと

$x^2(u-2)=C_1$　　$\therefore u=\dfrac{C_1}{x^2}+2$

$\dfrac{p}{x}=\dfrac{C_1}{x^2}+2$　　$\therefore p=\dfrac{C_1}{x}+2x$

$\dfrac{dy}{dx}=2x+C_1\cdot\dfrac{1}{x}$

$y=\displaystyle\int\left(2x+C_1\cdot\frac{1}{x}\right)dx$

$\therefore y=x^2+C_1\log|x|+C_2$　〃

(C_1, C_2 は任意定数)

これが求める一般解である。

(2)　$(x+1)\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}=(x+1)^4$

$\dfrac{dy}{dx}=p$ とおくと　$(x+1)\dfrac{dp}{dx}-2p=(x+1)^4$

$x\neq -1$　のとき　線形微分方程式

$\dfrac{dp}{dx}-\dfrac{2}{x+1}p=(x+1)^3\cdots$①

の斉次微分方程式 $\dfrac{dp}{dx}-\dfrac{2}{x+1}p=0\cdots$②

を変形して　$\dfrac{dp}{dx}=\dfrac{2p}{x+1}$

$\displaystyle\int\frac{1}{p}dp=2\int\frac{1}{x+1}dx$

$\log|p|=2\log|x+1|+c$

$\log\left|\dfrac{p}{(x+1)^2}\right|=c$　　$\therefore \dfrac{p}{(x+1)^2}=\pm e^c$

$\pm e^c=C$　とおくと　$p=C(x+1)^2$ (C は任意定数)

これが②の一般解である。

非斉次微分方程式①の特殊解の１つを

$p=a(x+1)^n$ (a, n は整数)　と予想すると

$\dfrac{dp}{dx}=an(x+1)^{n-1}$　これらを①に代入すると

$an(x+1)^{n-1}-2a(x+1)^{n-1}=(x+1)^3$

$a(n-2)(x+1)^{n-1}=(x+1)^3$

$\begin{cases} n-1=3 \\ a(n-2)=1 \end{cases}$　これを解いて　$\begin{cases} n=4 \\ a=\frac{1}{2} \end{cases}$

よって、①の解の１つは　$p=\frac{1}{2}(x+1)^4$　である。

したがって、①の一般解は

$p=\frac{1}{2}(x+1)^4+C(x+1)^2$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2}(x+1)^4+C(x+1)^2$

$y=\displaystyle\int\left\{\frac{1}{2}(x+1)^4+C(x+1)^2\right\}dx$

$=\dfrac{1}{10}(x+1)^5+\dfrac{C}{3}(x+1)^3+C_2$

$\frac{C}{3}=C_1$　とおくと、求める一般解は

$y=\dfrac{1}{10}(x+1)^5+C_1(x+1)^3+C_2$　〃

(C_1, C_2 は任意定数)