$y'' = f(y, y')$ の形の微分方程式

例 32　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1)　$2y\,\dfrac{d^2y}{dx^2} - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0$　　　　(2)　$y\,\dfrac{d^2y}{dx^2} - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 0$

(解)

(1)　$2y\,\dfrac{d^2y}{dx^2} - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0 \cdots$①

$\dfrac{dy}{dx} = p$　とおくと

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dp}{dy}\dfrac{dy}{dx} = p\dfrac{dp}{dy}$

これらを①に代入して

$2y \cdot p\dfrac{dp}{dy} - p^2 - 1 = 0$

$2yp\dfrac{dp}{dy} = p^2 + 1$

$\displaystyle\int \frac{2p}{p^2+1}dp = \int \frac{1}{y}dy$

$\log|p^2+1| = \log|y| + c$

$\log\left|\dfrac{p^2+1}{y}\right| = c$　　$\therefore \dfrac{p^2+1}{y} = \pm e^c$

$\pm e^c = C$　とおくと　　$p^2 + 1 = Cy$

$p^2 = Cy - 1$　　$\therefore p = \pm\sqrt{Cy-1}$

$\dfrac{dy}{dx} = \pm\sqrt{Cy-1}$　　$\therefore \dfrac{dx}{dy} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{Cy-1}}$

$x = \pm\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{Cy-1}}dy = \pm\frac{2}{C}\sqrt{Cy-1} + C_2$

$x - C_2 = \pm\dfrac{2}{C}\sqrt{Cy-1}$

$(x - C_2)^2 = \dfrac{4}{C^2}(Cy-1)$

$(x - C_2)^2 = 4 \cdot \dfrac{1}{C}\left(y - \dfrac{1}{C}\right)$

$\dfrac{1}{C} = C_1$　とおくと、求める一般解は

$4C_1(y - C_1) = (x - C_2)^2$　〃

$(C_1, C_2$ は任意定数)

(2)　$y\,\dfrac{d^2y}{dx^2} - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \cdots$②

$\dfrac{dy}{dx} = p$　とおくと

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dp}{dy}\dfrac{dy}{dx} = p\dfrac{dp}{dy}$

これらを②に代入すると

$y \cdot p\dfrac{dp}{dy} - p^2 = 0$

i)　$p \neq 0$　のとき

$y\dfrac{dp}{dy} = p$　　$\therefore \displaystyle\int \frac{1}{p}dp = \int \frac{1}{y}dy$

$\log|p| = \log|y| + c$

$\log\left|\dfrac{p}{y}\right| = c$　　$\therefore \dfrac{p}{y} = \pm e^c$

$\pm e^c = C$　とおくと　$p = Cy$

$\dfrac{dy}{dx} = Cy$　　$\therefore \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{Cy}$

$x = \displaystyle\int \frac{1}{Cy}dy = \frac{1}{C}\log|y| + c'$

$\therefore \log|y| = C(x - c')$　　$\therefore |y| = e^{C(x-c')}$

$y = \pm e^{Cc'} e^{Cx}$

$\pm e^{Cc'} = C_1$, $C = C_2$　とおくと、

求める一般解は

$y = C_1 e^{C_2 x}$　$(C_1, C_2$は任意定数)　$\cdots$③

ii)　$p = 0$　のとき　$\dfrac{dy}{dx} = 0$

$\therefore y = C_3$　$(C_3$ は任意定数)　$\cdots$④

③で、$C_1 = C_3$, $C_2 = 0$　とおくと

④が得られるから、④は③に含まれる。

したがって、i) , ii) から

求める一般解は

$y = C_1 e^{C_2 x}$　$(C_1, C_2$は任意定数)　〃