線形でない同次形微分方程式 $f(x,y,y',y'')=0$

$f(x,\rho y,\rho y',\rho y'')=\rho^r f(x,y,y',y'')$ という斉次条件を満足するとき $\Longrightarrow$ $y=e^t$ とおく

例 33　微分方程式 $y\dfrac{d^2y}{dx^2}-\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2-2y^2=0$ の一般解を求めよ。

≪確認≫

$y\dfrac{d^2y}{dx^2}-\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2-2y^2=0$ において

$$\rho y\left(\rho\frac{d^2y}{dx^2}\right)-\left(\rho\frac{dy}{dx}\right)^2-2(\rho y)^2=\rho^2\left\{y\frac{d^2y}{dx^2}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2y^2\right\}$$

がなり立つから、同次形である。よって、$y=e^t$ とおけばよい。

(解)

$y\dfrac{d^2y}{dx^2}-\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2-2y^2=0\cdots①$

$y=e^t$ とおくと

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}(e^t)\cdot\frac{dt}{dx}=e^t\frac{dt}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(e^t\frac{dt}{dx}\right)$$

$$=\frac{d}{dt}(e^t)\frac{dt}{dx}\cdot\frac{dt}{dx}+e^t\cdot\frac{d^2t}{dx^2}$$

$$=e^t\left(\frac{dt}{dx}\right)^2+e^t\frac{d^2t}{dx^2}$$

$$=e^t\left\{\left(\frac{dt}{dx}\right)^2+\frac{d^2t}{dx^2}\right\}$$

これらを①に代入して

$$e^t\cdot e^t\left\{\left(\frac{dt}{dx}\right)^2+\frac{d^2t}{dx^2}\right\}$$

$$-\left(e^t\frac{dt}{dx}\right)^2-2(e^t)^2=0$$

$$e^{2t}\frac{d^2t}{dx^2}-2e^{2t}=0$$

$$\therefore\frac{d^2t}{dx^2}-2=0$$

$\dfrac{dt}{dx}=p$ とおくと　$\dfrac{dp}{dx}=2$

$p=2\displaystyle\int dx=2x+C_1$　(C_1は任意定数)

$$\therefore\frac{dt}{dx}=2x+C_1$$

$$t=\int(2x+C_1)dx$$

$t=x^2+C_1x+C_2$　(C_1,C_2は任意定数)

これらを $y=e^t$ に代入すると

求める一般解は

$y=e^{x^2+C_1x+C_2}$　(C_1,C_2は任意定数)　〃

[問題]　微分方程式 $y\,y''-(y')^2+2x^2y^2=0$
について、次の問に答えよ。

(1)　同次形であることを検証せよ。

(2)　一般解を求めよ。

(ヒント)

$y\dfrac{d^2y}{dx^2}-\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+2x^2y^2=0\cdots①$

(1)　①において

$$(\rho y)\left(\rho\frac{d^2y}{dx^2}\right)-\left(\rho\frac{dy}{dx}\right)^2+2x^2(\rho y)^2$$

$=$

(2)　$y=e^t$ とおくと

$\therefore y=e^{-\frac{1}{6}x^4+C_1x+C_2}$　(C_1,C_2は任意定数)　〃