線形でない同次形微分方程式 $f(x, y, y', y'') = 0$

$f(\rho x, y, \frac{1}{\rho}y', \frac{1}{\rho^2}y'') = \rho^r f(x, y, y', y'')$ という斉次条件を満足するとき　$\Longrightarrow$　$x = e^t$　とおく

例 34　微分方程式 $xy\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 + y\dfrac{dy}{dx} = 0$ の一般解を求めよ。

≪確認≫

$xy\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + y\dfrac{dy}{dx} = 0$　において

$$(\rho x)y\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{d^2y}{dx^2}\right) - (\rho x)\left(\frac{1}{\rho}\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\left(\frac{1}{\rho}\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{\rho}\left\{xy\frac{d^2y}{dx^2} - x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\frac{dy}{dx}\right\}$$

がなり立つから、同次形である。よって、$x = e^t$　とおけばよい。

(解)　$xy\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + y\dfrac{dy}{dx} = 0 \cdots ①$

$x = e^t$　とおくと　$t = \log x$

$$\therefore \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} = \frac{1}{e^t} = e^{-t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot(e^{-t}) = e^{-t}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}(e^{-t})\frac{dt}{dx}\cdot\frac{dy}{dt} + e^{-t}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx}$$

$$= -e^{-t}e^{-t}\frac{dy}{dt} + e^{-t}\frac{d^2y}{dt^2}e^{-t}$$

$$= e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

これらを①に代入して

$$e^t y\cdot e^{-2t}\left(\frac{d^2t}{dx^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

$$- e^t\cdot\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)^2 + y\cdot e^{-t}\frac{dy}{dt} = 0$$

$$e^{-t}\left\{y\frac{d^2t}{dx^2} - y\frac{dy}{dt} - \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + y\frac{dy}{dt}\right\} = 0$$

$$e^{-t}\left\{y\frac{d^2y}{dt^2} - \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\} = 0$$

$$\therefore y\frac{d^2y}{dt^2} - \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 0 \cdots ②$$

$\dfrac{dy}{dt} = p$　とおくと

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dt} = \frac{dp}{dy}\cdot p$$

であるから、②から

$$y\cdot\frac{dp}{dy}\cdot p - p^2 = 0 \quad \therefore p\left(y\frac{dp}{dy} - p\right) = 0$$

i)　$p \neq 0$　のとき

$$y\frac{dp}{dy} = p \qquad \therefore \int\frac{1}{p}dp = \int\frac{1}{y}dy$$

$\log|p| = \log|y| + c$

$$\log\left|\frac{p}{y}\right| = c \qquad \therefore \frac{p}{y} = \pm e^c$$

$\pm e^c = a$　とおくと　$p = ay$ (a は任意定数)

$$\frac{dy}{dt} = ay \qquad \therefore \int\frac{1}{y}dy = a\int dt$$

$\log|y| = at + b$　(a, b は任意定数)

$|y| = e^{at+b}$　　$\therefore y = \pm e^b e^{at}$

$y = \pm e^b(e^t)^a = \pm e^b x^a$

$\pm e^b = C_1$, $a = C_2$　とおくと

$\therefore y = C_1 x^{C_2}$ (C_1, C_2は任意定数)$\cdots ③$

ii)　$p = 0$　のとき　$\dfrac{dy}{dt} = 0$

$\therefore y = C_3$　(C_3は任意定数)$\cdots ④$

③で、$C_1 = C_3$, $C_2 = 0$ とおくと

④を得るから、④は③に含まれる。

したがって、i) , ii) から

求める一般解は

$$y = C_1 x^{C_2} \quad (C_1, C_2\text{は任意定数}) \quad〃$$